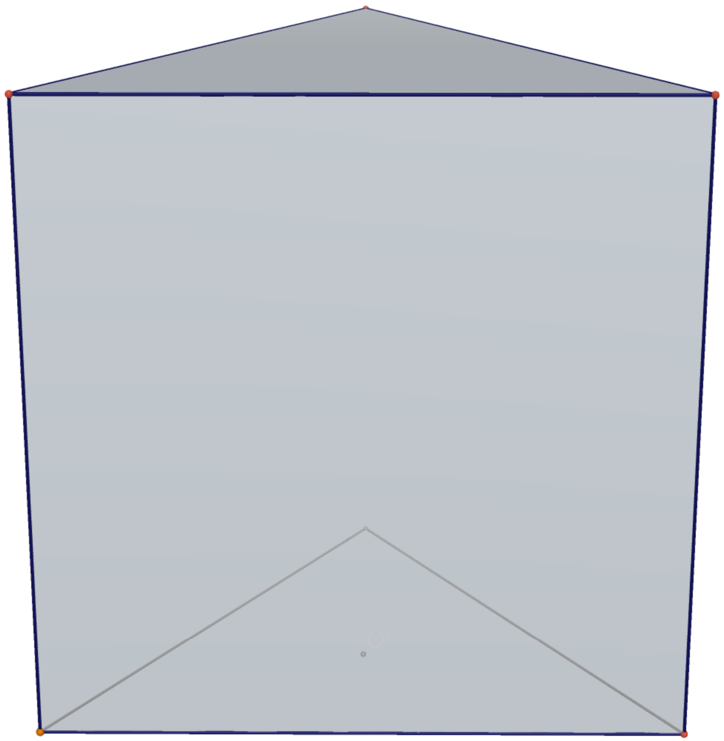
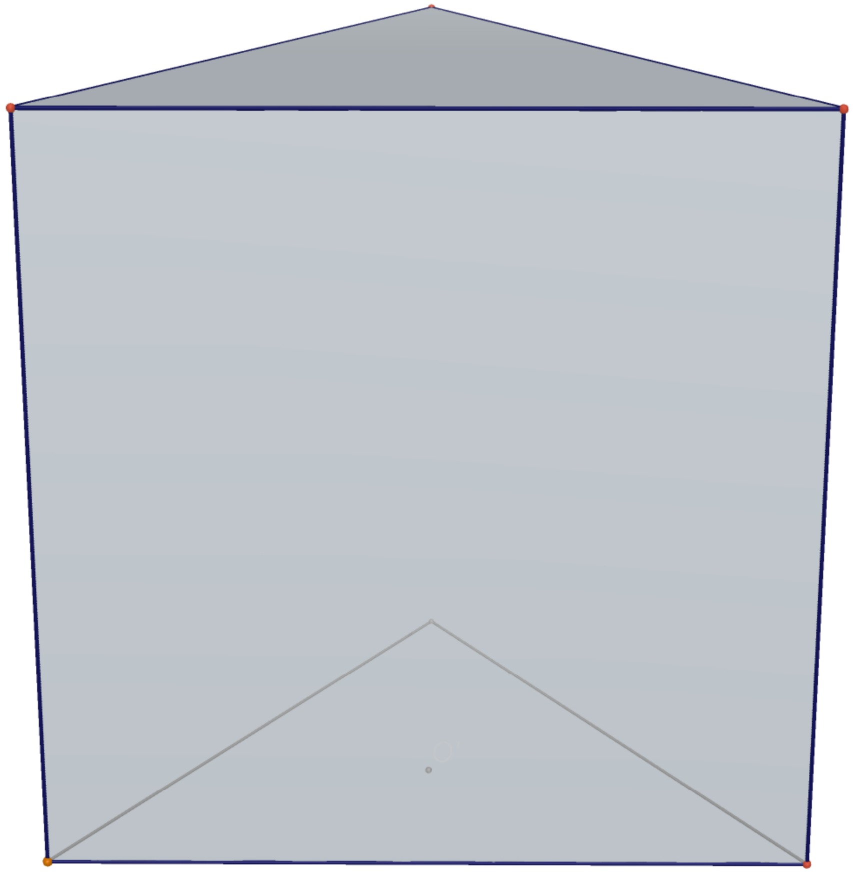


DOMANDA 27

Un prisma avente come base un triangolo equilatero e come lati quadrati è inscrivibile in una sfera?



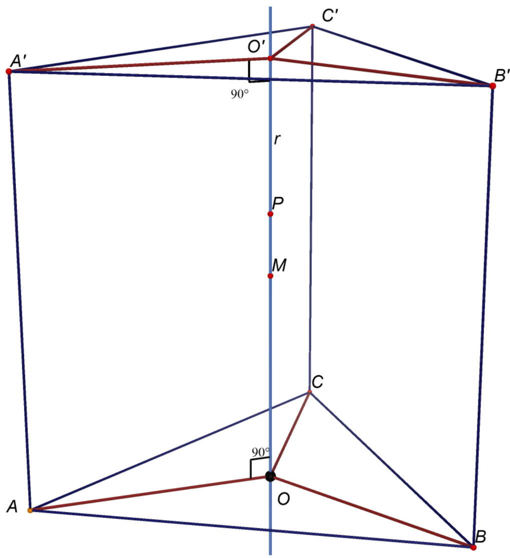
Se sì, quale è il suo centro, quanto misura il raggio?

RISPOSTA ALLA DOMANDA 27

Esiste la sfera circoscritta al prisma.
Il suo centro si trova nel punto medio dell'altezza del prisma passante per i centri dei due triangoli di base del prisma.
Il suo raggio è uguale a $\frac{1}{6}\sqrt{21}\,s$, dove s è la lunghezza degli spigoli del prisma.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo innanzitutto che, dati quattro punti non complanari, esiste una ed una sola sfera passante per essi. Dal momento che i vertici del prisma sono sei, non è detto che essa esista. Ma, se esiste, essa è unica.
Il centro della eventuale sfera circoscritta al prisma deve essere equidistante dai vertici del prisma.
Per determinare questo centro, procediamo per gradi.
Concentriamo per il momento l'attenzione sui vertici *A*, *B* e *C* del prisma. Sia α il piano passante per essi. Sappiamo che l'unico punto del piano α equidistante da *A*, *B* e *C* è il centro *O* del triangolo *ABC.*



Consideriamo ora la retta *r* passante per *O* e perpendicolare al piano α e consideriamo un qualunque punto *P* della retta *r*. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli *AOP*, *BOP*, *COP* (che sono rettangoli in *O*), si dimostra subito che il punto *P* è equidistante da *A*, *B* e *C*.
Analogamente, applicando il teorema di Pitagora ai triangoli *A'O'P*, *B'O'P*, *C'O'P* (che sono rettangoli in *O'*), si dimostra che il punto *P* è equidistante da *A'*, *B'* e *C'*.
Per ogni punto P della retta r, abbiamo quindi
$d = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ e $d' = \overline{PA'} = \overline{PB'} = \overline{PC'}$.
Ma, se $\overline{PO} \neq \overline{PO'}$, si ha, sempre per il teorema di Pitagora, $d \neq d'$.
Per avere $d = d'$, dobbiamo avere $\overline{PO} = \overline{PO'}$. Il punto *P* deve quindi coincidere con il punto medio *M* di *O* e *O'*.
Abbiamo quindi che la sfera di centro *M* e passante per uno dei vertici del prisma, per esempio *A*, passa per tutti gli altri vertici del prisma e quindi è circoscritta al prisma.
Per calcolare il raggio di tale sfera applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo *AOM*, che è rettangolo in *O*.
Ricordiamo che *O* è il centro del triangolo equilatero *ABC* e quindi $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}s$, dove *s* è la lunghezza degli spigoli del prisma. Dal momento che $\overline{OM} = \frac{1}{2}s$, per il teorema di Pitagora si ha che il raggio della sfera circoscritta al prisma è uguale a $\overline{MA} = \sqrt{\frac{7}{12}}s = \frac{1}{6}\sqrt{21}\,s$