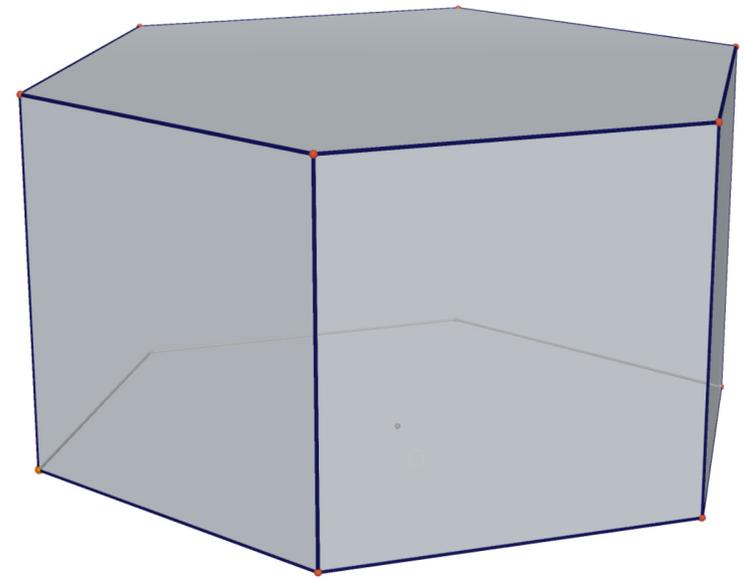
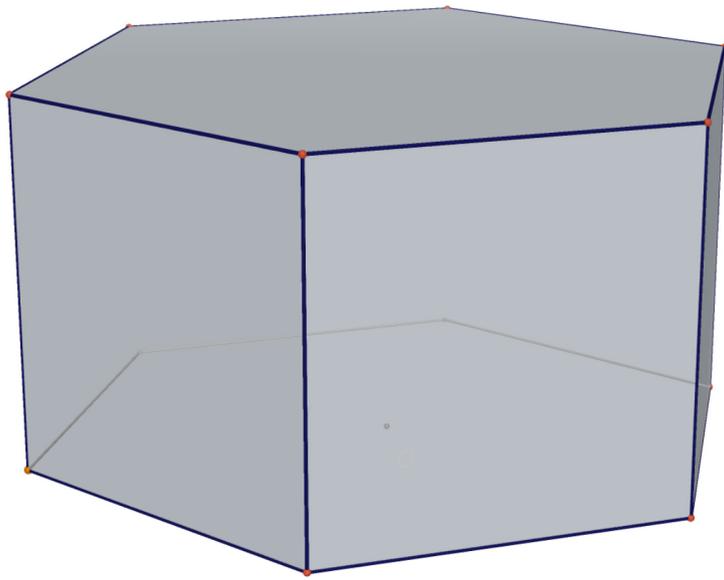


DOMANDA 29

Un prisma avente come base un esagono regolare e come lati quadrati è inscrivibile in una sfera?



Se sì, quale è il suo centro, quanto misura il raggio?

RISPOSTA ALLA DOMANDA 29

Esiste la sfera circoscritta al prisma.

Il suo centro si trova nel punto medio dell'altezza del prisma passante per i centri dei due esagoni di base del prisma.

Il suo raggio è uguale a $\frac{\sqrt{5}}{2}s$, dove s è la lunghezza degli spigoli del prisma.

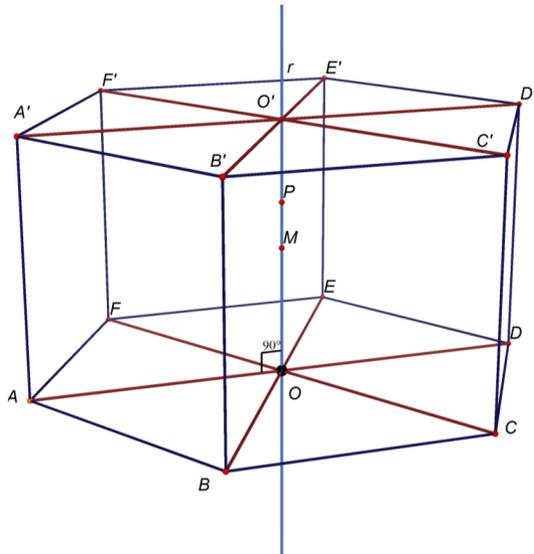
DIMOSTRAZIONE

Osserviamo innanzitutto che, dati quattro punti non complanari, esiste una ed una sola sfera passante per essi. Dal momento che i vertici del prisma sono dodici, non è detto che essa esista. Ma, se esiste, essa è unica.

Il centro della eventuale sfera circoscritta al prisma deve essere equidistante dai suoi vertici.

Per determinare questo centro, procediamo per gradi.

Concentriamo per il momento l'attenzione sui vertici A, B, C, D, E, F del prisma. Sia α il piano passante per essi. Sappiamo che l'unico punto del piano α equidistante da A, B, C, D, E, F è il centro O dell'esagono $ABCDEF$.



Consideriamo ora la retta r passante per O e perpendicolare al piano α e consideriamo un qualunque punto P della retta r . Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli $AOP, BOP, COP, DOP, EOP, FOP$ (che sono rettangoli in O), si dimostra subito che il punto P è equidistante da A, B, C, D, E, F .

Analogamente, applicando il teorema di Pitagora ai triangoli $A'O'P, B'O'P, C'O'P$ (che sono rettangoli in O'), si dimostra che il punto P è equidistante da A', B', C', D', E', F' .

Per ogni punto P della retta r , abbiamo quindi

$$d = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC} = \overline{PD} = \overline{PE} = \overline{PF} \quad \text{e} \\ d' = \overline{PA'} = \overline{PB'} = \overline{PC'} = \overline{PD'} = \overline{PE'} = \overline{PF'}.$$

Ma, se $\overline{PO} \neq \overline{PO'}$, si ha, sempre per il teorema di Pitagora, $d \neq d'$.

Per avere $d = d'$, dobbiamo avere $\overline{PO} = \overline{PO'}$. Il punto P deve quindi coincidere con il punto medio M di O e O' .

Abbiamo quindi che la sfera di centro M e passante per uno dei vertici del prisma, per esempio A , passa per tutti gli altri vertici del prisma e quindi è circoscritta al prisma.

Per calcolare il raggio di tale sfera applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo AOM , che è rettangolo in O .

Ricordiamo che O è il centro dell'esagono regolare $ABCDEF$ e quindi $\overline{OA} = s$, dove s è la lunghezza degli spigoli del prisma. Dal momento che $\overline{OM} = \frac{1}{2}s$, per il teorema di Pitagora si ha che il raggio della sfera

circoscritta al prisma è uguale a $\overline{MA} = \frac{\sqrt{5}}{2}s$