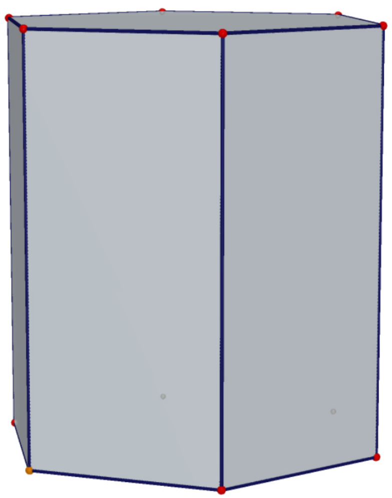
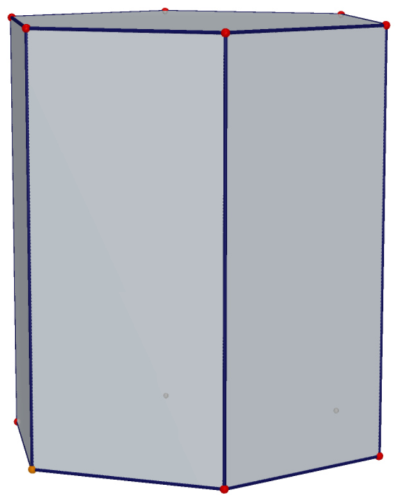


DOMANDA 30

Un prisma avente come base un esagono regolare di lato *l* e altezza *h* è inscrivibile in una sfera?



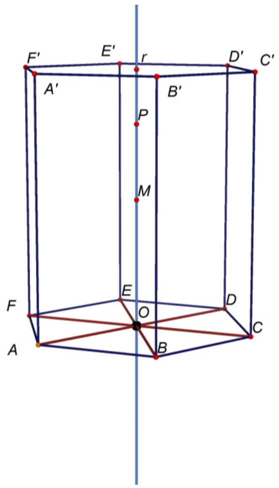
Se sì, quale è il suo centro, quanto misura il raggio?

RISPOSTA ALLA DOMANDA 30

Esiste la sfera circoscritta al prisma.
Il suo centro si trova nel punto medio dell'altezza del prisma passante per i centri dei due esagoni di base del prisma.
Il suo raggio è uguale a $\sqrt{\frac{h^2}{4}+s^2}$, dove *h* è l'altezza del prisma e *s* è la lunghezza dei suoi spigoli.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo innanzitutto che, dati quattro punti non complanari, esiste una ed una sola sfera passante per essi. Dal momento che i vertici del prisma sono dodici, non è detto che essa esista. Ma, se esiste, essa è unica.
Il centro della eventuale sfera circoscritta al prisma deve essere equidistante dai suoi vertici.
Per determinare questo centro, procediamo per gradi.
Concentriamo per il momento l'attenzione sui vertici *A, B, C, D, E, F* del prisma. Sia α il piano passante per essi. Sappiamo che l'unico punto del piano α equidistante da *A, B, C, D, E, F* è il centro *O* dell'esagono *ABCDEF.*



Consideriamo ora la retta *r* passante per *O* e perpendicolare al piano *α* e consideriamo un qualunque punto *P* della retta *r*. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli *AOP*, *BOP*, *COP, DOP, EOP,FOP* (che sono rettangoli in *O*), si dimostra subito che il punto *P* è equidistante da *A, B, C, D, E, F*.
Analogamente, applicando il teorema di Pitagora ai triangoli *A'O'P*, *B'O'P*, *C'O'P* (che sono rettangoli in *O'*), si dimostra che il punto *P* è equidistante da *A', B', C', D', E', F'*.
Per ogni punto *P* della retta *r*, abbiamo quindi
$d=\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}=\overline{PE}=\overline{PF}$ e
$d'=\overline{PA'}=\overline{PB'}=\overline{PC'}=\overline{PD'}=\overline{PE'}=\overline{PF'}$.
Ma, se $\overline{PO}\neq\overline{PO'}$, si ha, sempre per il teorema di Pitagora, $d\neq d'$.
Per avere $d=d'$, dobbiamo avere $\overline{PO}=\overline{PO'}$. Il punto *P* deve quindi coincidere con il punto medio *M* di *O* e *O'*.
Abbiamo quindi che la sfera di centro *M* e passante per uno dei vertici del prisma, per esempio *A*, passa per tutti gli altri vertici del prisma e quindi è circoscritta al prisma.
Per calcolare il raggio di tale sfera applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo *AOM*, che è rettangolo in *O*.
Ricordiamo che *O* è il centro dell'esagono regolare *ABCDEF* e quindi $\overline{OA}=s$, dove *s* è la lunghezza degli spigoli del prisma. Dal momento che $\overline{OM}=h$, dove *h* è l'altezza del prisma, per il teorema di Pitagora si ha che il raggio della sfera circoscritta al prisma è uguale a

$$\overline{MA}=\sqrt{\frac{h^2}{4}+s^2}$$