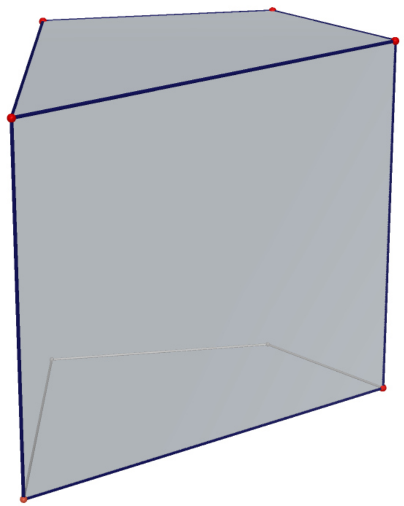
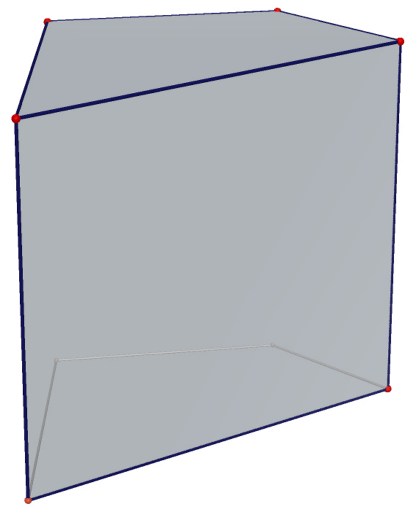


DOMANDA 32

Un prisma avente come base un quadrilatero qualsiasi e come lati rettangoli è inscrivibile in una sfera?



Se sì, quale è il suo centro, quanto misura il raggio?

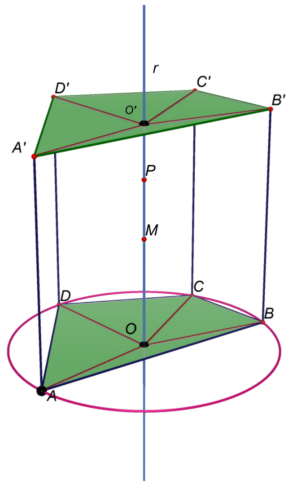
RISPOSTA ALLA DOMANDA 32

Se il quadrilatero di base non è inscrivibile in una circonferenza non esiste una circonferenza circoscritta al prisma.
Se il quadrilatero di base è inscrivibile in una circonferenza *c*, esiste la sfera circoscritta al prisma.
Il suo centro si trova nel punto medio dell'altezza del prisma passante per i centri dei quadrilateri di base.

Il suo raggio è uguale a $\sqrt{\frac{h^2}{4}+s^2}$, dove *h* è l'altezza del prisma e *s* è la lunghezza del raggio della circonferenza *c*.

DIMOSTRAZIONE

Osserviamo innanzitutto che, dati quattro punti non complanari, esiste una ed una sola sfera passante per essi. Dal momento che i vertici del prisma sono otto, non è detto che essa esista. Ma, se esiste, essa è unica. Il suo centro deve essere equidistante dai suoi vertici.
Per determinare questo centro, procediamo per gradi.
Concentriamo per il momento l'attenzione sui vertici *A*, *B, C, D* del prisma. Sia *α* il piano passante per essi.
Consideriamo la circonferenza *c* passante per *A*, *B*, *C*. Il suo centro *O* è equidistante da *A*, *B*, *C*.
Abbiamo due possibilità:
1) il punto *D* non appartiene alla circonferenza *c*. In tal caso non abbiamo alcun punto del piano *α* equidistante da *A*, *B, C, D.* Non esiste neanche nello spazio un punto equidistante da *A*, *B*, *C*, *D*. Se infatti esistesse un tale punto, chiamiamolo *E*, la sfera di centro E passante per *A*, *B, C, D* intersecherebbe il piano *α* in una circonferenza che avrebbe il suo centro in un punto equidistante da *A*, *B, C, D*. Abbiamo già visto che un tale punto non esiste. In questo caso, pertanto, non esiste una sfera circoscritta al prisma.
2) il punto *D* appartiene alla circonferenza *c*. Sappiamo che l'unico punto del piano α equidistante da *A*, *B*, *C*, *D* è il centro *O* della circonferenza *c.*



Consideriamo ora la retta *r* passante per *O* e perpendicolare al piano *α* e consideriamo un qualunque punto *P* della retta *r*. Applicando il teorema di Pitagora ai triangoli *AOP*, *BOP*, *COP*, *DOP* (che sono rettangoli in *O*), si dimostra subito che il punto *P* è equidistante da *A*, *B, C, D*. Analogamente, applicando il teorema di Pitagora ai triangoli *A'O'P*, *B'O'P*, *C'O'P, D'O'P* (che sono rettangoli in *O'*), si dimostra che il punto *P* è equidistante da *A'*, *B'*, *C'*, *D'*. Per ogni punto *P* della retta *r*, abbiamo $d=\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\overline{PD}$ e $d'=\overline{PA'}=\overline{PB'}=\overline{PC'}=\overline{PD'}$
Ma, se $\overline{PO}\neq\overline{PO'}$, si ha, sempre per il teorema di Pitagora, $d\neq d'$.
Per avere $d=d'$, dobbiamo avere $\overline{PO}=\overline{PO'}$. Il punto *P* deve quindi coincidere con il punto medio *M* di *O* e *O'*.
Abbiamo quindi che la sfera di centro *M* e passante per uno dei vertici del prisma, per esempio *A*, passa per tutti gli altri vertici del prisma e quindi è circoscritta al prisma.
Per calcolare il raggio di tale sfera applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo *AOM*, che è rettangolo in *O*.
Ricordiamo che *O* è il centro della circonferenza *c*, quindi $\overline{OA}=s$, dove *s* è la raggio della circonferenza *c*. Dal momento che $\overline{OM}=h$, dove *h* è l'altezza del prisma, per il teorema di Pitagora si ha che il raggio della sfera circoscritta al prisma è uguale a

$$\overline{MA}=\sqrt{\frac{h^2}{4}+s^2}$$