Piano Lauree Scientifiche - Progetto Archimede

Dai poliedri platonici ai poliedri archimedei per espansione

Espansione di un cubo

Consideriamo il quadrato verde *AEHD* faccia del cubo *ABCDEFGH*. Vogliamo traslare questa faccia esternamente al cubo lungo una semiretta perpendicolare ad essa. Per far ciò consideriamo il punto *SB* simmetrico di *B* rispetto ad *A* e consideriamo la semiretta di origine *A* e passante per *SB*.

Consideriamo poi un punto *A′* su questa semiretta e trasliamo la faccia verde in modo tale che il punto *A* vada a finire in *A′*. Otteniamo il quadrato *A′E′H′D′* che chiamiamo immagine della faccia *AEHD* attraverso la traslazione che porta *A* in *A′*.

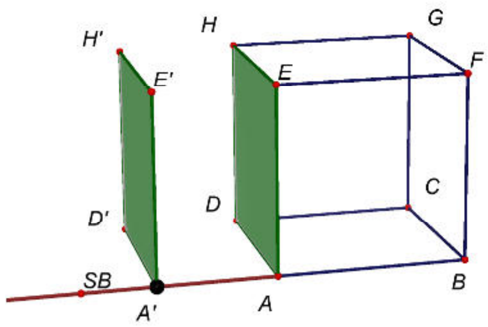

Figura 1

In modo analogo trasliamo la faccia rossa *ABEF* del cubo in modo tale che la distanza tra *A’’* e *A* sia uguale alla distanza tra *A’* e *A*.

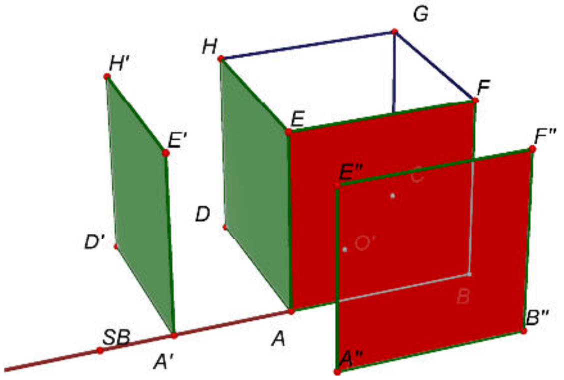

Figura 2

Facciamo la stessa cosa per tutte le facce del cubo.

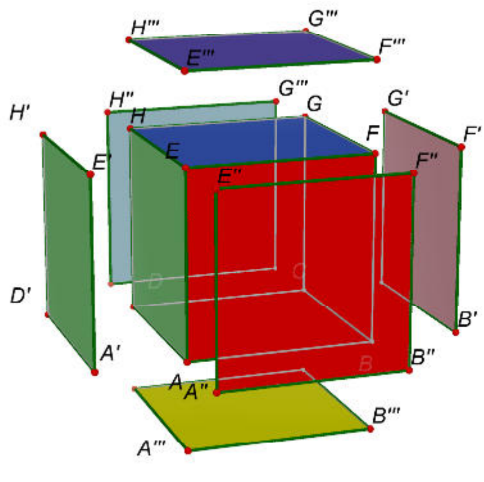

Figura 3

Consideriamo ora il triangolo *A'A''A'''* avente come vertici le immagini del punto *A* attraverso le tre traslazioni. Facciamo la stessa cosa per gli altri cinque vertici del cubo.

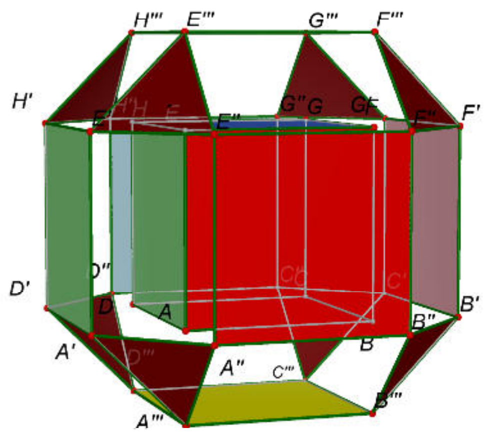

Figura 4

Consideriamo il quadrilatero *A'A''E''E'* e coloriamolo di celeste. Facciamo la stessa cosa per gli altri quadrilateri. Non abbiamo ancora colorato i quattro quadrilateri superiori per far vedere almeno una parte del cubo originario.

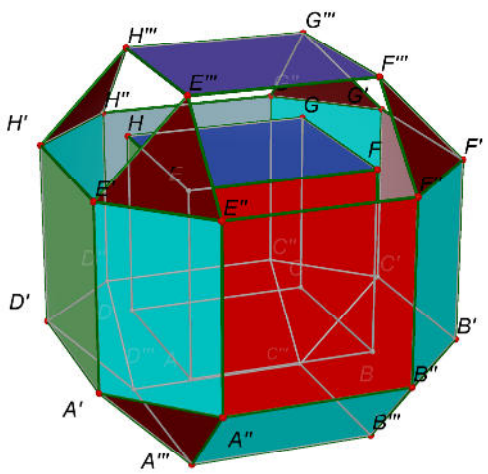

Figura 5

Ora coloriamo anche i rimanenti quattro quadrilateri.

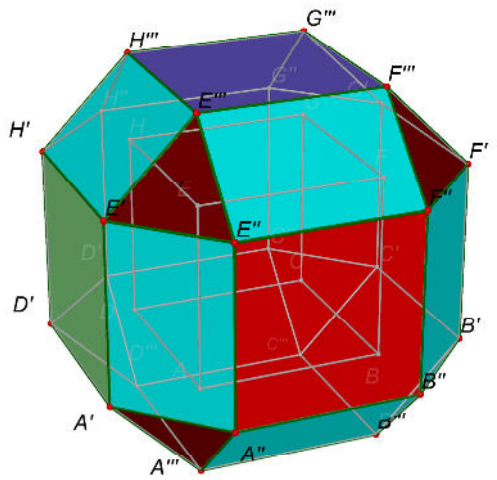

Figura 6

Abbiamo ottenuto un poliedro che chiamiamo **espansione** del cubo.

Abbiamo quindi che l'espansione di un cubo è un poliedro avente come facce:

- sei quadrati, ognuno dei quali si chiama **espansione** di una faccia del cubo attraverso una traslazione. Queste facce dell'espansione del cubo sono ovviamente uguali alle facce del cubo di partenza. In particolare gli spigoli di tutti questi quadrati sono tutti uguali agli spigoli del quadrato.
- otto triangoli, ognuno dei quali si chiama **espansione** di uno degli otto vertici del cubo. Vedremo tra poco che tutti questi triangoli sono equilateri e uguali tra loro.
- dodici quadrilateri, ognuno dei quali si chiama **espansione** di uno dei dodici lati del quadrato. Si può dimostrare che questi quadrilateri sono rettangoli.

Vogliamo ora mostrare che tutti i triangoli espansioni dei vertici del cubo sono equilateri. Per far ciò prendiamo in considerazione un vertice A del cubo e le tre facce del cubo che hanno come vertice A. Sono le facce che abbiamo colorato in verde, rosso e giallo nella figura seguente. Consideriamo ora la retta r passante per il vertice A e per il centro del cubo (r passa quindi anche per G).

Sappiamo che la retta r è asse di rotazione del cubo di periodo 3. La rotazione intorno alla retta r che porta D in E (è una rotazione di 120°) porta E in B e quindi porta la faccia verde del cubo nella faccia rossa. Possiamo quindi pensare la faccia espansa rossa come immagine della faccia espansa verde attraverso la rotazione intorno alla retta r che porta D in E. In particolare il punto A'' è l'immagine del punto A' attraverso la rotazione.

Questa stessa rotazione porta la faccia rossa del cubo nella faccia gialla e quindi possiamo pensare la faccia espansa gialla come l'immagine della faccia rossa attraverso la rotazione.

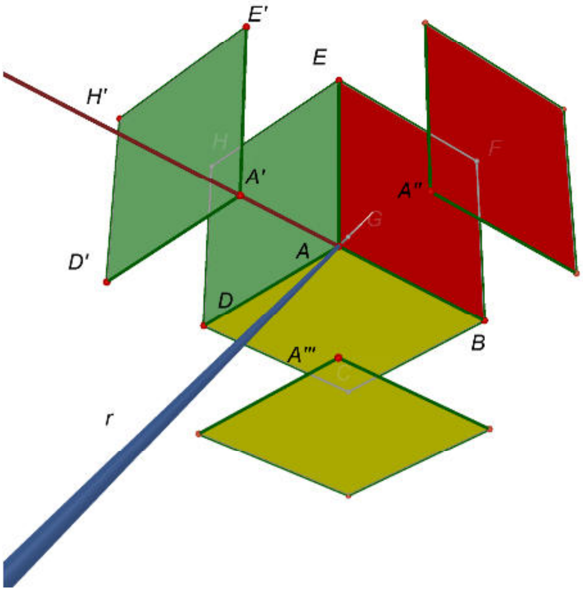

Figura 7

I punti *AA'A''* sono pertanto ottenuti uno dall'altro attraverso successive rotazioni intorno alla retta *r* di 120°. Sono quindi vertici di un triangolo equilatero che giace su un piano perpendicolare alla retta *r*. L'intersezione della retta *r* con questo piano è il centro del triangolo equilatero.

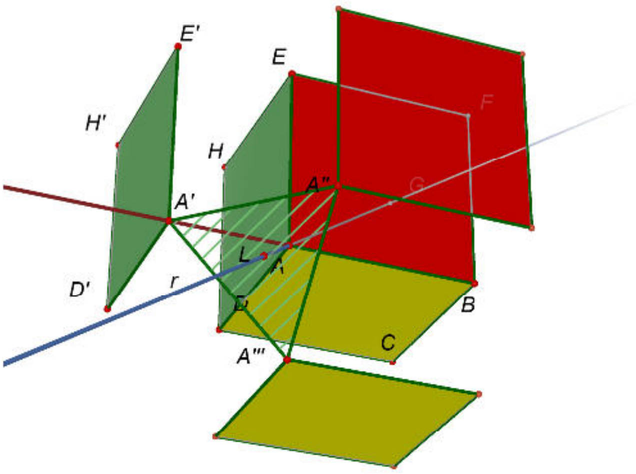

Figura 8

Si può ripetere lo stesso ragionamento per ognuno dei vertici del cubo. Abbiamo quindi che tutte le facce triangolari del cubo espanso sono triangoli equilateri.

Dimostriamo ora che questi triangoli sono uguali tra loro.

Consideriamo per esempio il triangolo *A'A''A'''*(espansione del vertice *A*) e il triangolo *F'F''F'''* (espansione del vertice *F*). Prendiamo una simmetria del cubo che porta il vertice *A* nel vertice *F* (una di queste è la rotazione intorno alla retta *r'*, passante per *B* e *H*, che porta il punto *A* nel punto *F*).

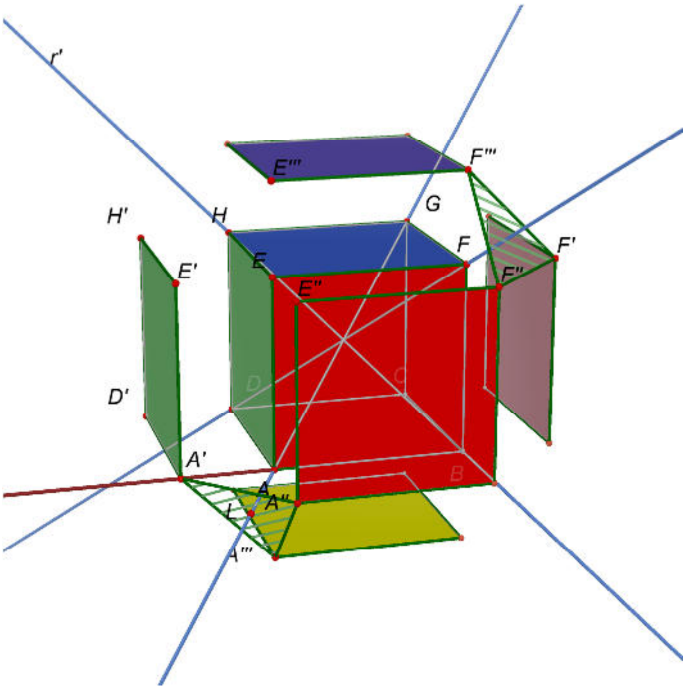

Figura 9

Questa isometria porta il triangolo *A'A''A'''* nel triangolo *F'F''F'''*. E quindi i due triangoli sono uguali.

Dal momento che, dati due qualsiasi vertici del cubo, esiste una simmetria del cubo che porta il primo vertice nel secondo, i triangoli espansioni dei due vertici sono uguali.

La lunghezza dei lati dei triangoli equilateri varia lati varia: aumenta all'aumentare della distanza tra A e A'.

Concentriamo ora la nostra attenzione sui dodici quadrilateri che sono espansioni dei dodici spigoli. Nella figura seguente ne abbiamo evidenziato due:

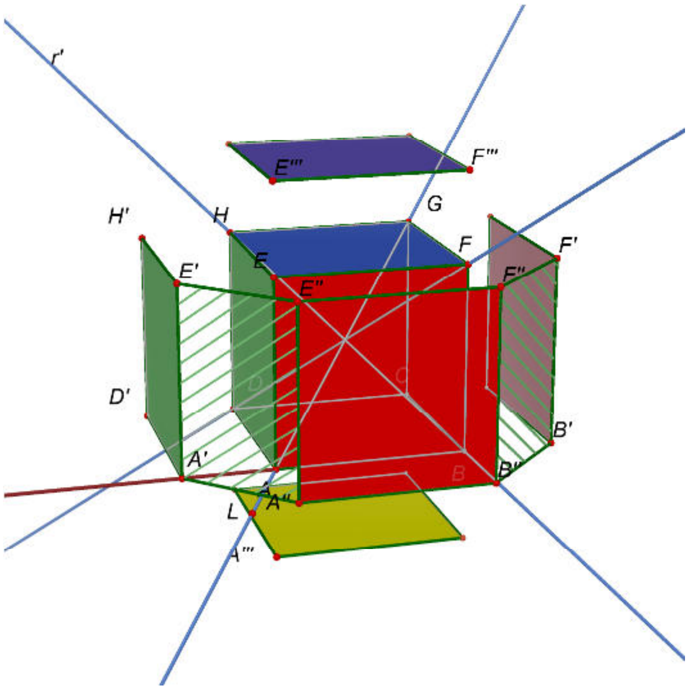

Figura 10

Si può dimostrare (noi non lo facciamo) che sono tutti rettangoli. Si dimostra poi facilmente (esercizio) che tutti questi rettangoli sono uguali. Ognuno di essi ha ovviamente un lato di lunghezza uguale al lato del cubo originario e l'altro uguale ai lati dei triangoli equilateri descritti prima.

GENERALIZZAZIONE AD UN POLIEDRO PLATONICO QUALSIASI.

Così come abbiamo espanso un cubo, possiamo espandere un qualsiasi altro poliedro platonico traslando le facce esternamente lungo semirette perpendicolari alle facce stesse.

Le facce traslate sono ovviamente uguali alle facce del poliedro platonico di partenza .

Ogni vertice *V* del poliedro platonico viene espanso in un poligono regolare che giace su un piano *p* perpendicolare all'asse di rotazione *r* del poliedro passante per il vertice *V*. Il suo centro è l'intersezione del piano *p* con l'asse di rotazione *r*. Il numero di vertici del poligono espansione del vertice *V* è uguale al numero di spigoli del poliedro che hanno come vertice *V*. E' quindi uguale al periodo dell'asse di rotazione *r*. Quindi

- nel caso del cubo abbiamo triangoli equilateri (lo abbiamo già visto)
- nel caso del tetraedro regolare abbiamo triangoli equilateri
- nel caso dell'ottaedro abbiamo quadrati
- nel caso del dodecaedro abbiamo triangoli equilateri
- nel caso dell'icosaedro abbiamo pentagoni regolari.

Ogni spigolo del poliedro platonico viene espanso in un rettangolo.