

## Domanda 1

Avendo a disposizione una squadra è possibile stabilire se un chiodo piantato su un piano è perpendicolare al piano? Come? Perché?

Spunto preso da:

V. Villani *Cominciamo dal punto*

Pitagora Editrice, Bologna, 2006.



## VERSO LA RISPOSTA

La squadra serve per controllare se un angolo è retto.

Fissiamo un cateto della squadra sul chiodo in modo che il vertice dell'angolo retto della squadra si sovrapponga al punto in cui il chiodo tocca il piano. Se riusciamo a porre l'altro cateto della squadra sul piano, vuol dire che il chiodo è perpendicolare alla retta del piano corrispondente al secondo cateto della squadra.

La prima risposta che ci viene in mente è che, quando riusciamo a fare ciò, il chiodo forma un angolo di  $90^\circ$  con il piano e quindi il chiodo è perpendicolare al piano.

Ma, facciamo attenzione, se consideriamo un chiodo infisso su un piano in **qualsiasi posizione**, possiamo **sempre** far sovrapporre un cateto della squadra al chiodo e porre l'altro cateto sul piano. Provare per credere.

Avremmo allora dimostrato che ogni chiodo è perpendicolare al piano.

Ciò è chiaramente assurdo. Tutti noi siamo convinti che quando piantiamo un chiodo in un determinato punto del piano c'è una sola posizione in cui il chiodo è perpendicolare al piano.

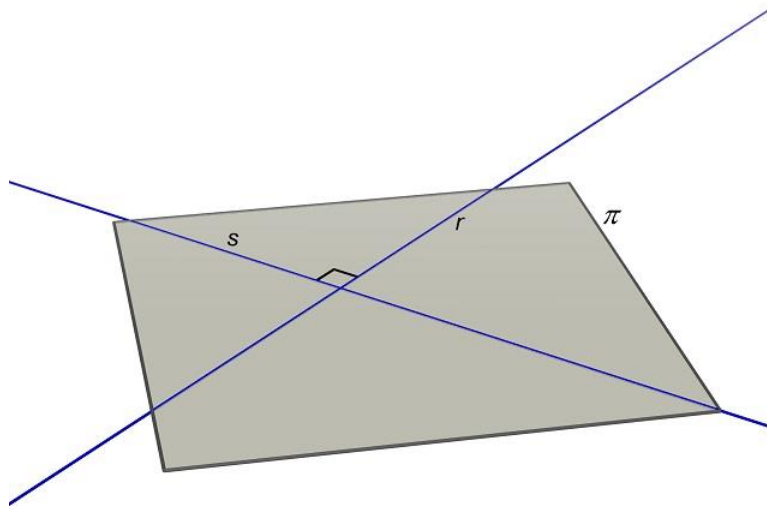
Il fatto è che ognuno di noi, sebbene sia in grado di capire intuitivamente quando una retta è perpendicolare ad un piano, non sempre è in grado di darne una definizione ben precisa.

Per arrivare a darne una definizione dobbiamo innanzitutto dare la definizione di perpendicolarità tra due rette nello spazio che si incontrano in un punto.

Sappiamo che, date due rette che si intersecano in un punto, esiste uno ed un solo piano che contiene entrambe le rette.

E quindi per dare la definizione di rette perpendicolari tra loro possiamo ricorrere alla definizione che viene data in geometria del piano:

**Definizione** (Definizione 10 del libro I degli Elementi di Euclide)  
Due rette di un piano che si intersecano in un punto si dicono **perpendicolari** tra loro se i quattro angoli che essi formano sono tutti uguali. Questi angoli vengono detti **retti**.

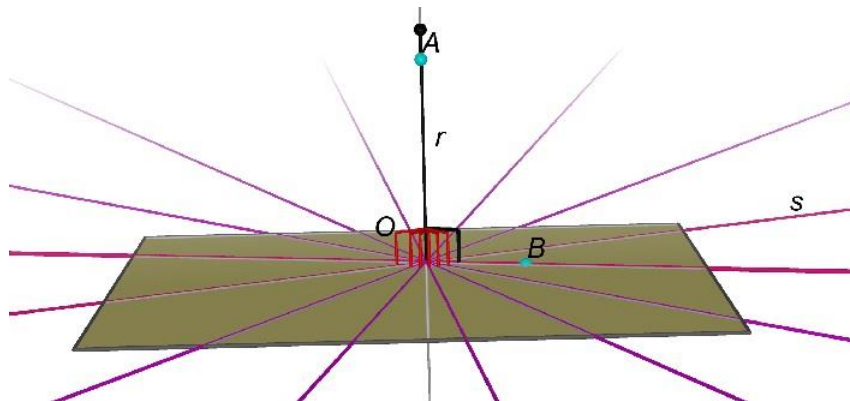


In effetti non è necessario controllare che tutti e quattro gli angoli siano retti. Basta controllare che uno di essi sia retto. Se lo è sono retti anche gli altri tre angoli. Lasciamo al lettore la dimostrazione di ciò.

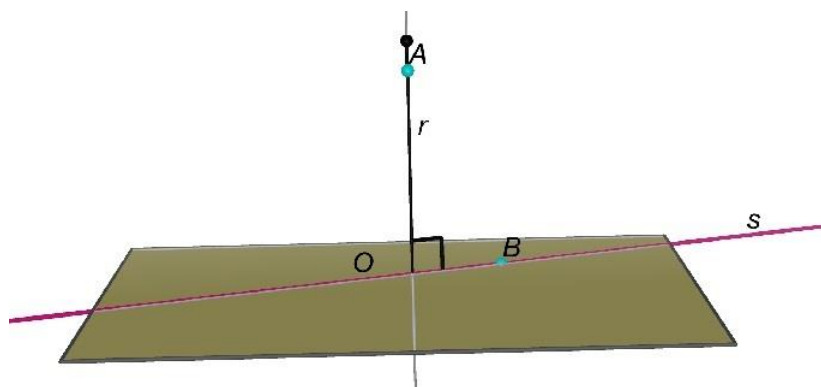
Possiamo ora dare la definizione di perpendicolarità tra una retta e un piano.

**Definizione** (Definizione 3 del libro XI degli Elementi di Euclide)

Una **retta** e un **piano** che si intersecano in un punto  $O$  si dicono **perpendicolari** se la retta è perpendicolare a **tutte** le rette del piano passanti per il punto  $O$ .



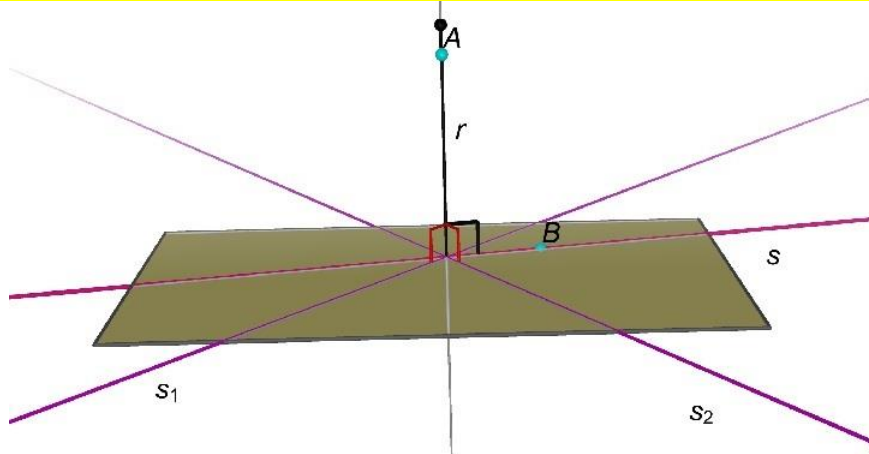
Ora capiamo l'errore che abbiamo fatto. Fino ad ora abbiamo controllato la perpendicolarità del chiodo con **una sola** retta del piano.



Per vedere quindi se il chiodo è perpendicolare al piano in teoria dovremmo fare infinite prove: una per ogni retta del piano passante per il punto  $O$ .

In effetti il seguente teorema ci permette di fare solo due verifiche:

**Teorema** (Proposizione 4 del libro XI degli Elementi di Euclide)  
Siano dati una retta  $r$  un piano che si intersecano in un punto  $O$ .  
Se la retta  $r$  è perpendicolare a due rette distinte del piano  
passanti per  $O$ , allora la retta  $r$  e il piano sono perpendicolari).



## RISPOSTA

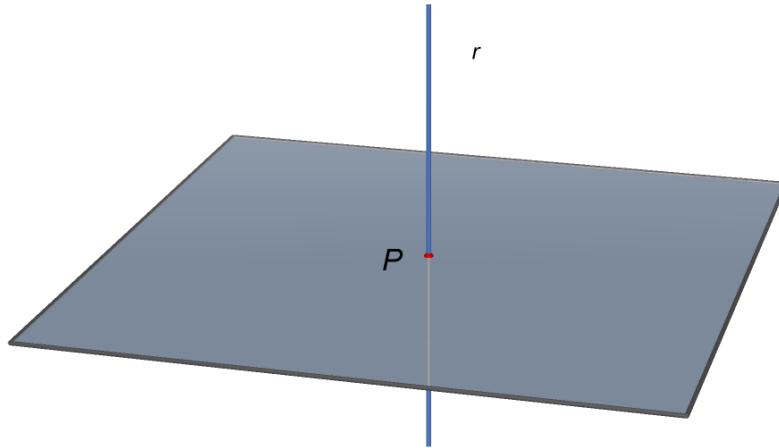
Per verificare se il chiodo è perpendicolare al piano consideriamo innanzitutto il punto  $O$  in cui il chiodo è infisso nel piano. Poi consideriamo una retta del piano passante per il punto  $O$  e vediamo se possiamo sovrapporre un cateto della squadra al chiodo e l'altro alla retta scelta.

Anche se riusciamo a fare ciò non abbiamo ancora finito. Dobbiamo scegliere una seconda retta del piano passante per il punto  $O$  e controllare se anche in questo caso possiamo sovrapporre i due cateti della squadra con il chiodo e con la seconda retta.

Se ambedue le verifiche vanno a buon fine possiamo affermare che il chiodo e il piano sono perpendicolari.

## ALCUNE ULTERIORI OSSERVAZIONI

Osserviamo che l'ultimo teorema visto ci permette, data una retta  $r$  e un suo punto  $P$ , di determinare un piano passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$ .

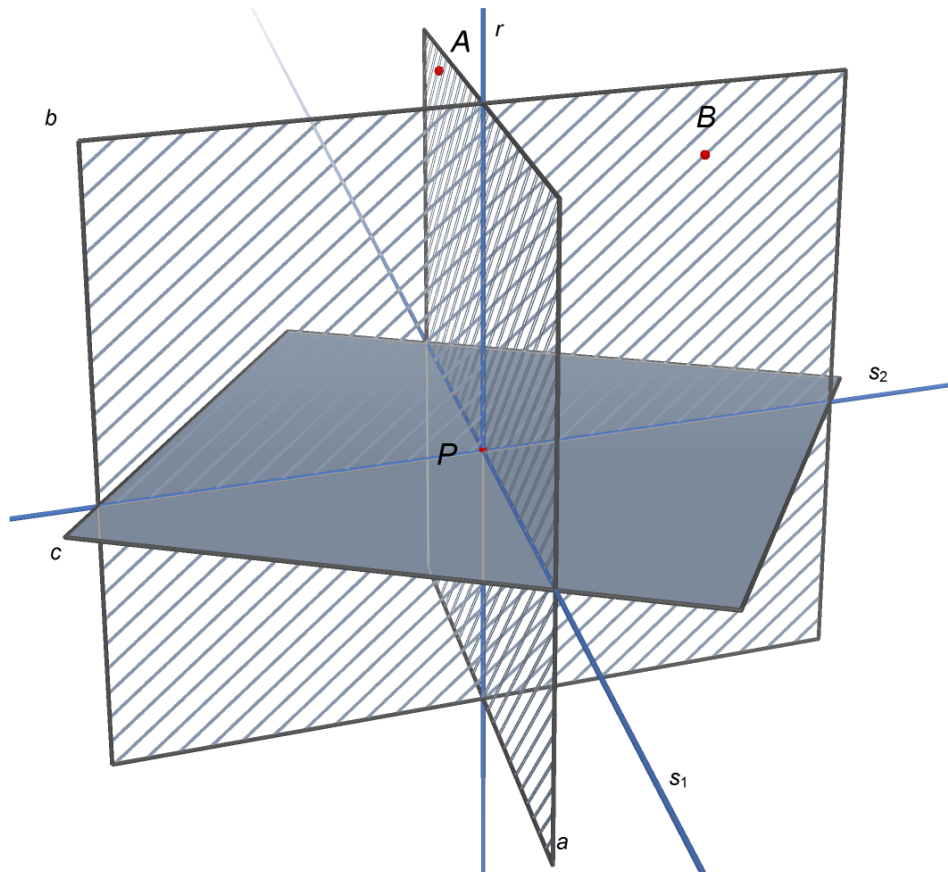


Ecco come facciamo.

Fissiamo un punto  $A$  non appartenente alla retta  $r$  e consideriamo il piano  $a$  contenente  $r$  e  $A$ . In questo piano costruiamo la retta  $s_1$  contenuta nel piano  $a$ , passante per  $P$  e perpendicolare a  $r$ .

Fissiamo un punto  $B$  non appartenente al piano  $a$  e consideriamo il piano  $b$  contenente  $r$  e  $B$ . In questo piano costruiamo la retta  $s_2$  contenuta nel piano  $b$ , passante per  $B$  e perpendicolare a  $r$ .

Il piano  $c$  contenente le rette  $s_1$  e  $s_2$  è il piano cercato perché



contiene ovviamente il punto  $P$  e contiene le rette  $s_1$  e  $s_2$  che sono, per costruzione, rette passanti per  $P$  ed entrambe perpendicolari alla retta  $r$ .

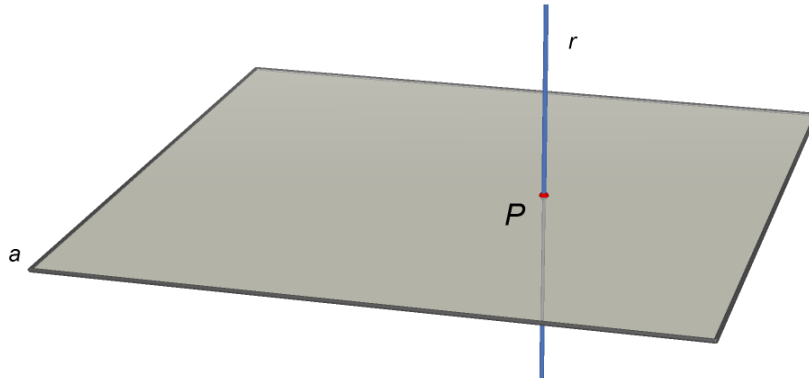
Si possono dimostrare i seguenti teoremi:

**Teorema.** Dato un piano  $c$  e un suo punto  $P$ , esiste un solo piano passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$ .

**Teorema** (Proposizione 5 del libro XI degli Elementi di Euclide)

Ogni retta passante per  $P$  e perpendicolare alla retta  $r$  appartiene al piano passante per  $P$  e perpendicolare a  $r$ .

Dato un piano  $\alpha$  e un suo punto  $P$ , vogliamo ora costruire una retta passante per  $P$  e perpendicolare al piano  $\alpha$ .



Ecco come facciamo.



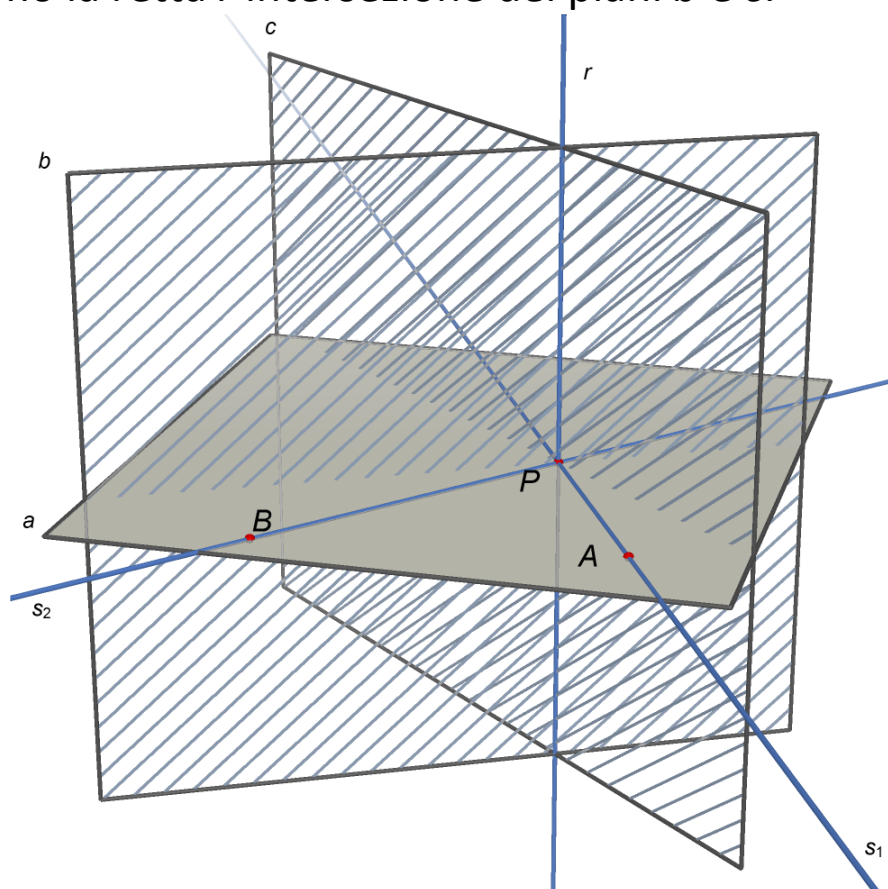
Consideriamo un punto  $A$ , diverso da  $P$ , sul piano  $a$  e la retta  $s_1$  passante per  $A$  e  $P$ . Essa è contenuta nel piano  $a$ .

Costruiamo il piano  $b$  passante per  $P$  perpendicolare alla retta  $s_1$  (abbiamo visto in precedenza come costruire questo piano)

Consideriamo un punto  $B$ , sul piano  $a$ , non appartenente alla retta  $s_1$  e la retta  $s_2$  passante per  $B$  e  $P$ . Essa è contenuta nel piano  $a$ .

Costruiamo il piano  $c$  passante per  $P$  perpendicolare alla retta  $s_2$

Consideriamo la retta  $r$  intersezione dei piani  $b$  e  $c$ .



La retta  $r$  contiene ovviamente il punto  $P$ . Inoltre, dal momento che è perpendicolare sia a  $s_1$  che  $s_2$ , rette del piano  $a$  passanti per  $P$ , è perpendicolare al piano  $a$ . E quindi verifica le condizioni richieste.

Si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema. (Proposizioni 12 e 13 del libro XI degli Elementi di Euclide)

Data un piano  $a$  e un suo punto  $P$ , esiste una sola retta passante per  $P$  e perpendicolare al piano  $a$ .