

Sapienza, Università di Roma
Dipartimento di Matematica

Scuola estiva 2020

4 settembre 2020

Giuseppe Accascina

Geometria tridimensionale in una stanza

Domanda 1

Avendo a disposizione una squadra è possibile stabilire se un chiodo piantato su un piano è perpendicolare al piano? Come? Perché?

Spunto preso da: V. Villani *Cominciamo dal punto*, Pitagora Editrice, Bologna, 2006.



Domanda 2

Avendo a disposizione una livella è possibile stabilire se un tavolo è orizzontale? Come? Perché?

Spunto preso da: V. Villani *Cominciamo dal punto*, Pitagora Editrice, Bologna.



Domanda 3

Perché di solito si pongono i cardini di una porta su una retta perpendicolare al pavimento?



Domanda 4

Avendo a disposizione una squadra (ed una matita?) è possibile stabilire se due pareti di una stanza sono perpendicolari? Come? Perché?



Domanda 5

Abbiamo posto i cardini di una porta su una retta perpendicolare al pavimento.

La porta è perpendicolare al pavimento? Perché?



Domanda 6

Due pareti di una stanza sono entrambe perpendicolari al pavimento della stanza. Possiamo affermare che lo spigolo formato dalle due pareti è perpendicolare al pavimento? Perché?



Risposte

Domanda 1

Avendo a disposizione una squadra è possibile stabilire se un chiodo piantato su un piano è perpendicolare al piano? Come? Perché?

Spunto preso da:

V. Villani *Cominciamo dal punto*

Pitagora Editrice, Bologna, 2006.



VERSO LA RISPOSTA

La squadra serve per controllare se un angolo è retto.

Fissiamo un cateto della squadra sul chiodo in modo che il vertice dell'angolo retto della squadra si sovrapponga al punto in cui il chiodo tocca il piano. Se riusciamo a porre l'altro cateto della squadra sul piano, vuol dire che il chiodo è perpendicolare alla retta del piano corrispondente al secondo cateto della squadra.

La prima risposta che ci viene in mente è che, quando riusciamo a fare ciò, il chiodo forma un angolo di 90° con il piano e quindi il chiodo è perpendicolare al piano.

Ma, facciamo attenzione, se consideriamo un chiodo infisso su un piano in **qualsiasi posizione**, possiamo **sempre** far sovrapporre un cateto della squadra al chiodo e porre l'altro cateto sul piano. Provare per credere.

Avremmo allora dimostrato che ogni chiodo è perpendicolare al piano.

Ciò è chiaramente assurdo. Tutti noi siamo convinti che quando piantiamo un chiodo in un determinato punto del piano c'è una sola posizione in cui il chiodo è perpendicolare al piano.

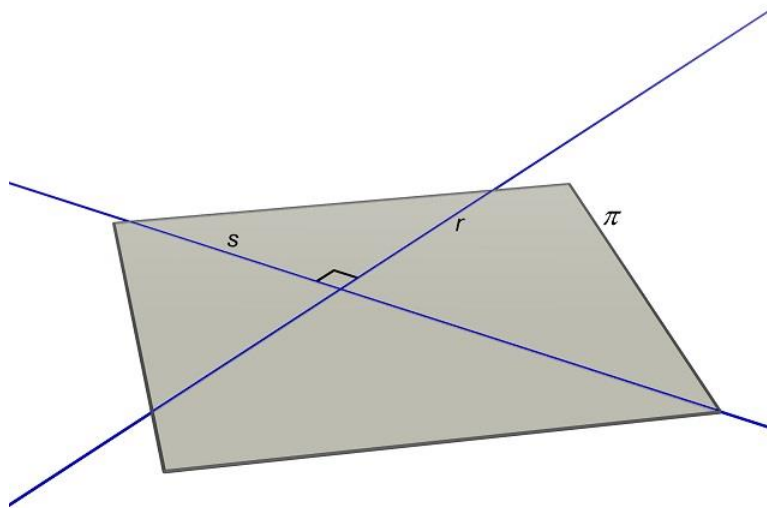
Il fatto è che ognuno di noi, sebbene sia in grado di capire intuitivamente quando una retta è perpendicolare ad un piano, non sempre è in grado di darne una definizione ben precisa.

Per arrivare a darne una definizione dobbiamo innanzitutto dare la definizione di perpendicolarità tra due rette nello spazio che si incontrano in un punto.

Sappiamo che, date due rette che si intersecano in un punto, esiste uno ed un solo piano che contiene entrambe le rette.

E quindi per dare la definizione di rette perpendicolari tra loro possiamo ricorrere alla definizione che viene data in geometria del piano:

Definizione (Definizione 10 del libro I degli Elementi di Euclide)
Due rette di un piano che si intersecano in un punto si dicono **perpendicolari** tra loro se i quattro angoli che essi formano sono tutti uguali. Questi angoli vengono detti **retti**.

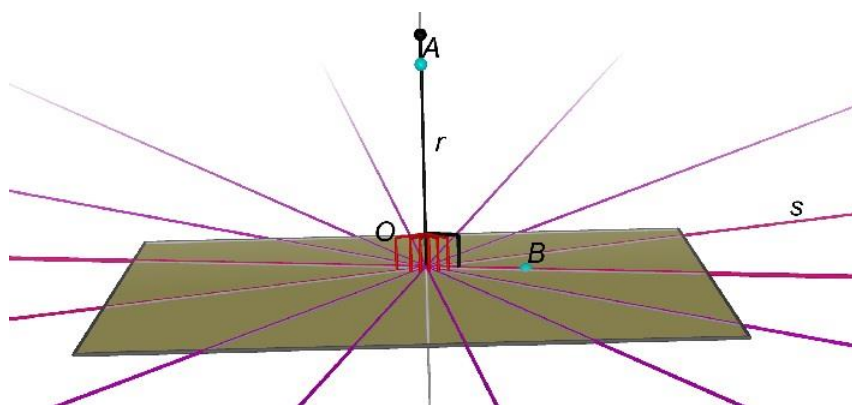


In effetti non è necessario controllare che tutti e quattro gli angoli siano retti. Basta controllare che uno di essi sia retto. Se lo è sono retti anche gli altri tre angoli. Lasciamo al lettore la dimostrazione di ciò.

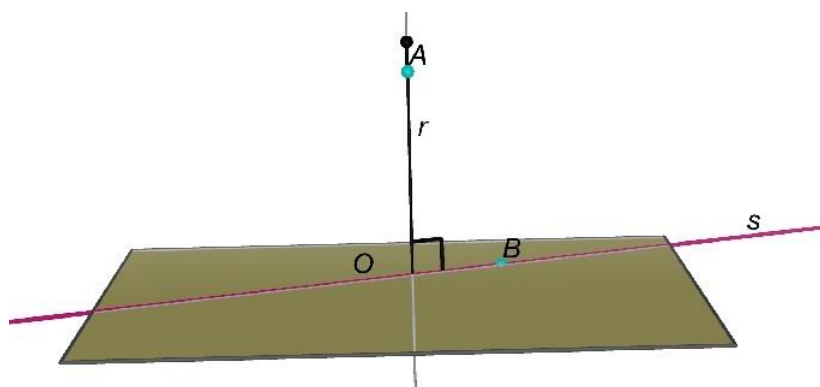
Possiamo ora dare la definizione di perpendicolarità tra una retta e un piano.

Definizione (Definizione 3 del libro XI degli Elementi di Euclide)

Una **retta** e un **piano** che si intersecano in un punto O si dicono **perpendicolari** se la retta è perpendicolare a **tutte** le rette del piano passanti per il punto O .



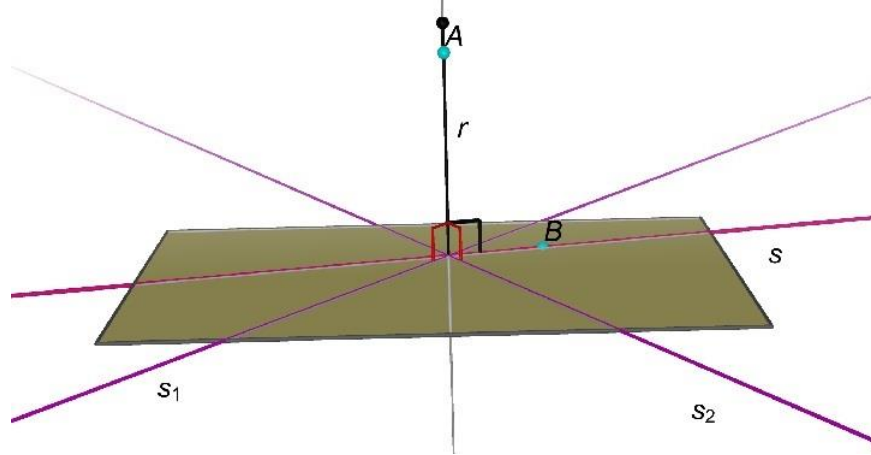
Ora capiamo l'errore che abbiamo fatto. Fino ad ora abbiamo controllato la perpendicolarità del chiodo con **una sola** retta del piano.



Per vedere quindi se il chiodo è perpendicolare al piano in teoria dovremmo fare infinite prove: una per ogni retta del piano passante per il punto O .

In effetti il seguente teorema ci permette di fare solo due verifiche:

Teorema (Proposizione 4 del libro XI degli Elementi di Euclide)
Siano dati una retta r un piano che si intersecano in un punto O .
Se la retta r è perpendicolare a due rette distinte del piano passanti per O , allora la retta r e il piano sono perpendicolari).



RISPOSTA

Per verificare se il chiodo è perpendicolare al piano consideriamo innanzitutto il punto O in cui il chiodo è infisso nel piano. Poi consideriamo una retta del piano passante per il punto O e vediamo se possiamo sovrapporre un cateto della squadra al chiodo e l'altro alla retta scelta.

Anche se riusciamo a fare ciò non abbiamo ancora finito. Dobbiamo scegliere una seconda retta del piano passante per il punto O e controllare se anche in questo caso possiamo sovrapporre i due cateti della squadra con il chiodo e con la seconda retta.

Se ambedue le verifiche vanno a buon fine possiamo affermare che il chiodo e il piano sono perpendicolari.

Domanda 2

Avendo a disposizione una livella è possibile stabilire se un tavolo è orizzontale? Come? Perché?

Spunto preso da:

V. Villani *Cominciamo dal punto*

Pitagora Editrice, Bologna.

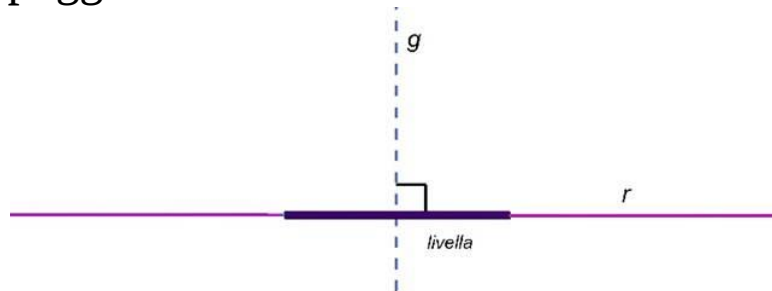


VERSO LA RISPOSTA

Capiamo innanzitutto come funziona una livella.

Se la bolla d'aria della livella sta al centro, allora la retta r su cui poggia la livella è perpendicolare alla retta g , corrispondente alla forza di gravità, passante per il centro della livella.

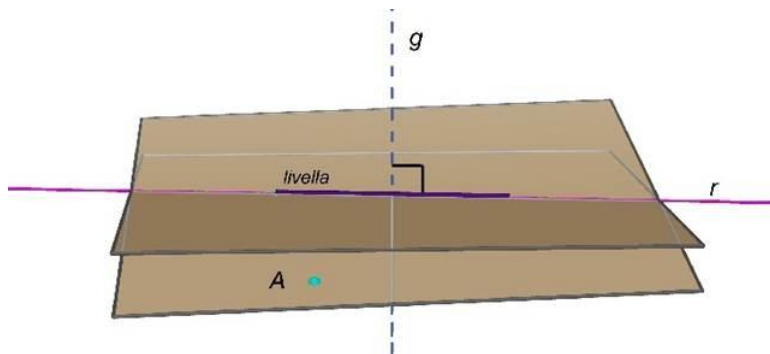
Essendo quest'ultima ovviamente verticale, ciò implica che la retta r su cui poggia la livella è orizzontale.



Bisogna pertanto porre la livella sul tavolo e controllare che la bolla d'aria sia al centro.

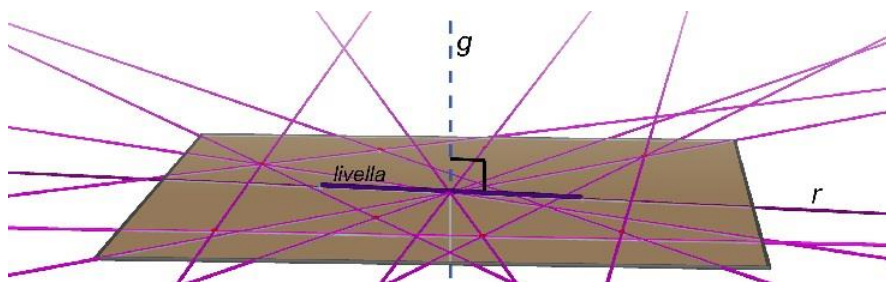
Ma, facciamo attenzione, ciò NON è sufficiente per dire che il piano è orizzontale.

Infatti di piani contenenti la retta r , su cui giace la livella, ve ne sono infiniti: solo uno di essi è orizzontale.



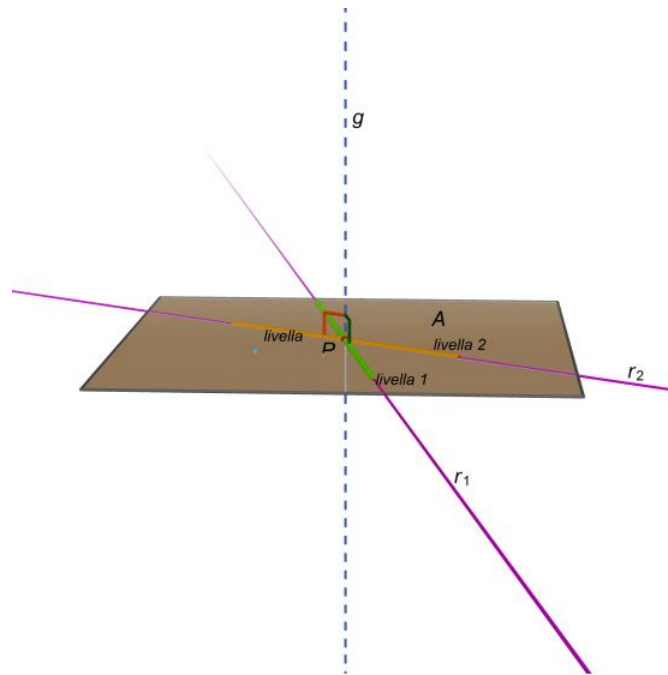
In effetti un tavolo è orizzontale se sono orizzontali tutte le rette che giacciono sul piano.

Noi abbiamo fatto un solo controllo. Ne dovremmo fare infiniti. Uno per ogni retta del piano.



Noi abbiamo invece fatto il controllo per una sola retta.

In effetti, se provassimo a chiedere ad un qualsiasi artigiano esperto di controllare se un piano è orizzontale, vedremmo che l'artigiano pone la livella sul piano, controlla che la bolla sia al centro, poi ruota la livella e controlla di nuovo che la bolla sia al centro. Se in entrambi i casi la bolla è al centro, l'artigiano afferma che il piano è orizzontale. Afferma cioè che **tutte** le rette del piano sono orizzontali.



L'artigiano ha perfettamente ragione. Perché?

L'artigiano sta sfruttando, forse inconsapevolmente, alcuni importanti teoremi di geometria dello spazio riguardanti la perpendicolarità tra una retta e un piano.

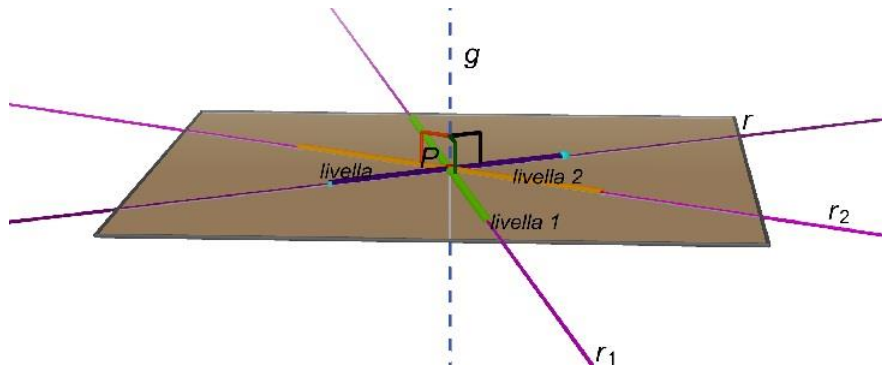
Ricordiamo che l'artigiano, dopo aver controllato che le rette r_1 e r_2 sono perpendicolari alla retta g , ha affermato che il piano è orizzontale.

Bene, si può dimostrare il seguente teorema.

Teorema (Proposizione 4 del libro XI degli Elementi di Euclide)

Siano dati una retta g un piano che si intersecano in un punto P .

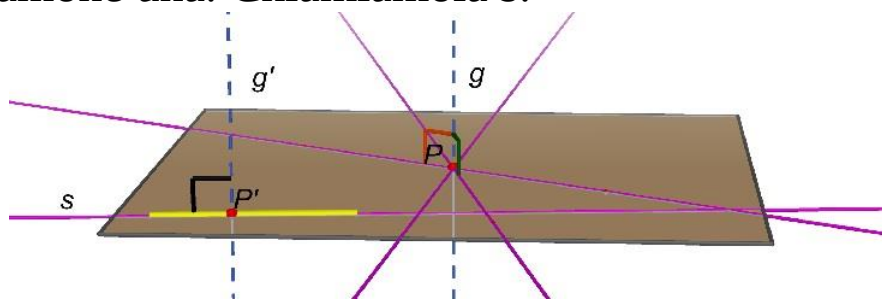
Se la retta g è perpendicolare a due rette distinte r_1 e r_2 del piano passanti per P , allora la retta g è perpendicolare a qualsiasi retta r del piano passante per P .



Da ciò possiamo dedurre che tutte le rette del piano passanti per P sono perpendicolari alla retta g e quindi sono orizzontali.

Ma ora dovremmo controllare che ogni altra retta del piano è orizzontale.

Consideriamone una. Chiamiamola s .



Consideriamo un suo punto P' e consideriamo la retta g' corrispondente alla forza di gravità applicata in P' .

Le due rette g e g' passanti per P e P' corrispondenti alla forza di gravità sono parallele.

Allora ci viene in aiuto un altro teorema della geometria dello spazio.

Teorema (Proposizione 8 del libro XI degli Elementi di Euclide)
 Se un piano è perpendicolare ad una retta, allora è perpendicolare a qualsiasi retta parallela alla retta stessa.

Da questo teorema segue la retta s è perpendicolare a g' e quindi è orizzontale.

Abbiamo quindi una risposta alla domanda che ci è stata posta.

RISPOSTA

Se la livella, posta prima su una retta del tavolo e poi su un'altra retta del tavolo che interseca la prima, ha in entrambi i casi la bolla al centro, allora il piano è orizzontale.

Domanda 3

Perché di solito si pongono i cardini di una porta su una retta perpendicolare al pavimento?



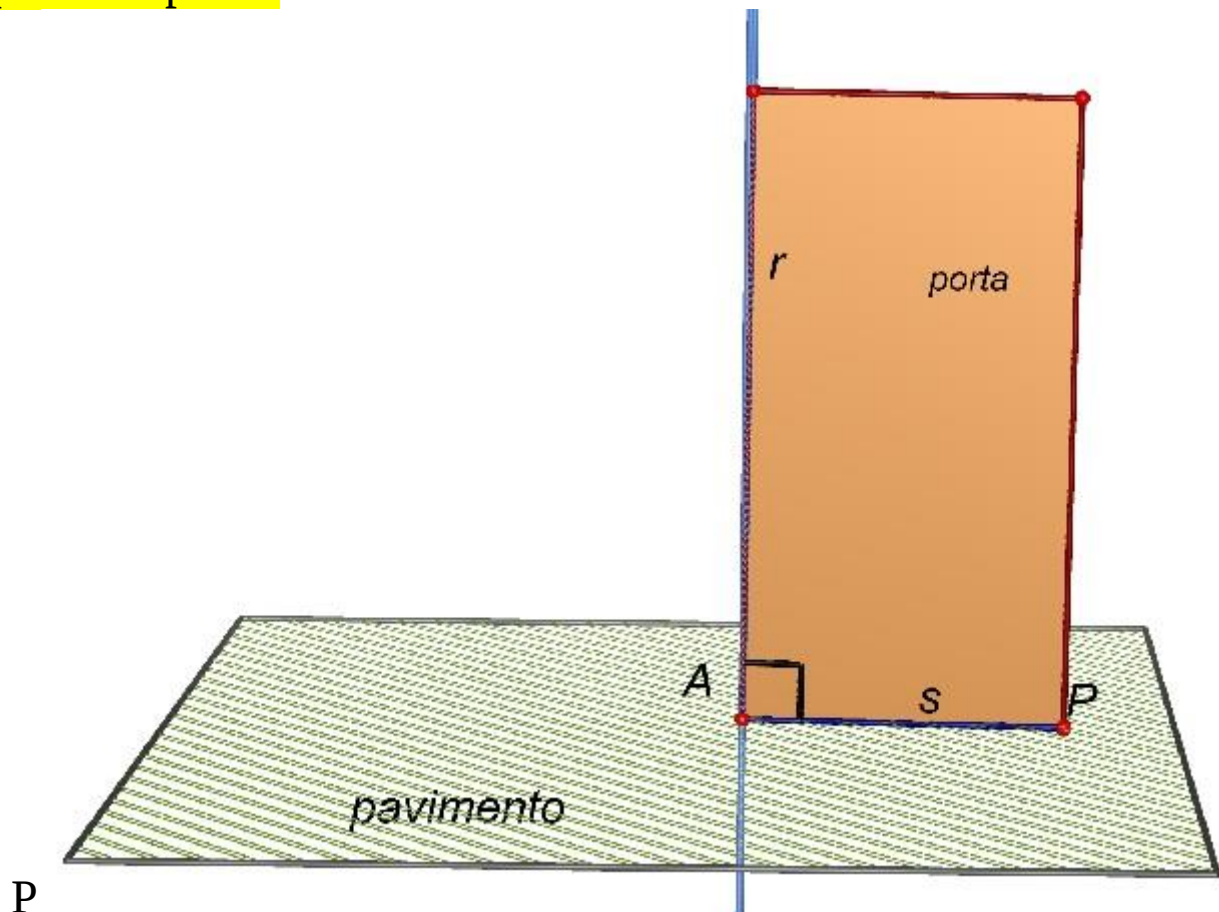
VERSO LA RISPOSTA

La porta è rettangolare. Pertanto il lato inferiore s della porta è perpendicolare al lato della porta su cui sono poggiati i cardini su cui gira la porta stessa.

Affinché la porta possa girare liberamente intorno ai suoi cardini e non vi sia alcuno spazio tra il lato inferiore della porta e il pavimento, il lato inferiore della porta deve giacere sul pavimento. Ci viene in aiuto il seguente

Teorema (Proposizione 5 del libro XI degli Elementi di Euclide)

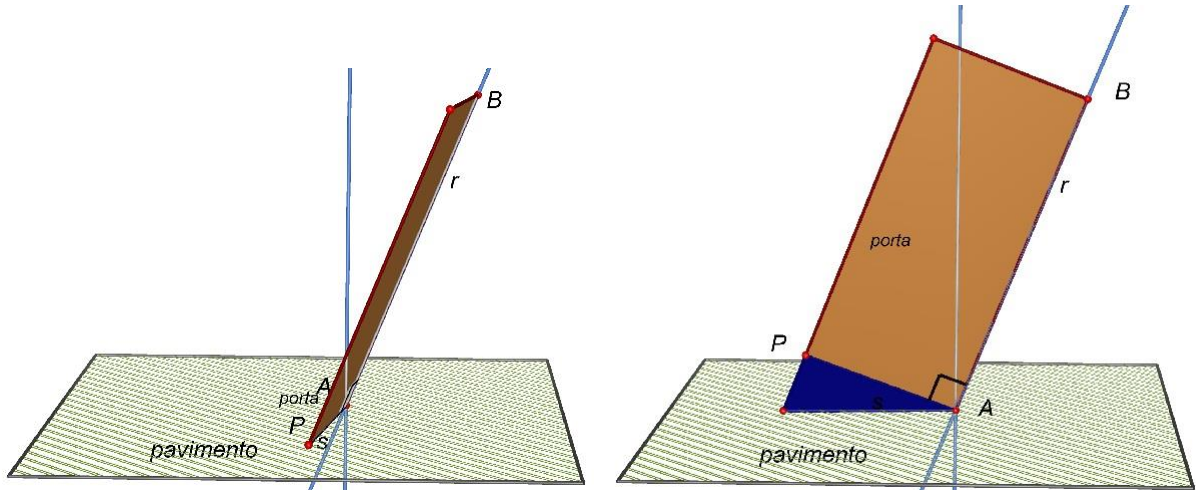
Sia data una retta r e un suo punto A . Ogni retta passante per A e perpendicolare alla retta r è contenuta nel piano perpendicolare a r passante per A .



Pertanto, dal momento che vogliamo che la retta s giaccia sul pavimento, dobbiamo fare in modo che il pavimento coincida con il piano passante per A perpendicolare alla retta r su cui sono posti i cardini della porta.

E quindi la retta r dei cardini deve essere perpendicolare al pavimento.

Se avessimo posto la retta dei cardini non perpendicolare al pavimento



la porta non avrebbe potuto girare liberamente e in alcune posizioni avrebbe lasciato degli spazi tra la porta e il pavimento.

RISPOSTA

Si pone il lato della porta contenente i cardini su una retta perpendicolare al pavimento in modo tale che, quando giriamo la porta sui suoi cardini, il bordo inferiore della porta sia sempre aderente al pavimento.

Domanda 4

Avendo a disposizione una squadra (ed una matita?) è possibile stabilire se due pareti di una stanza sono perpendicolari? Come? Perché?



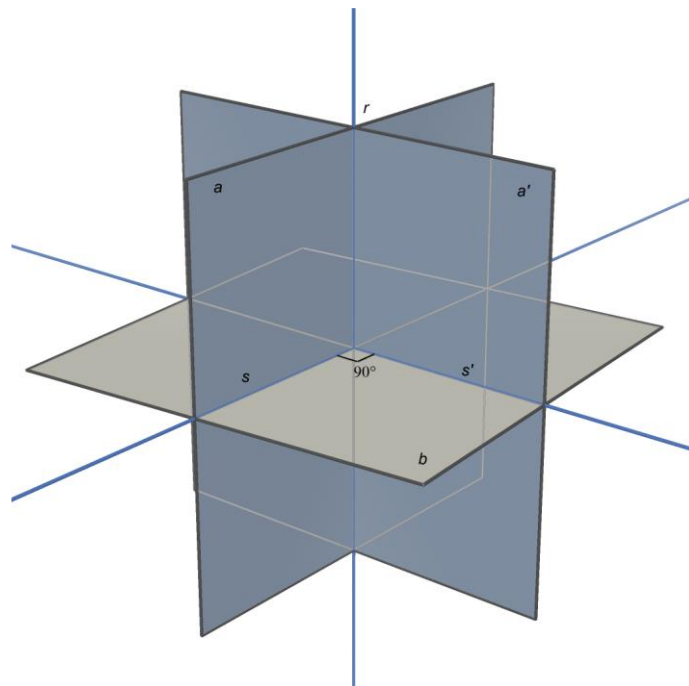
VERSO LA RISPOSTA

Supponiamo che le due pareti appartengano a due piani. E quindi la domanda è:

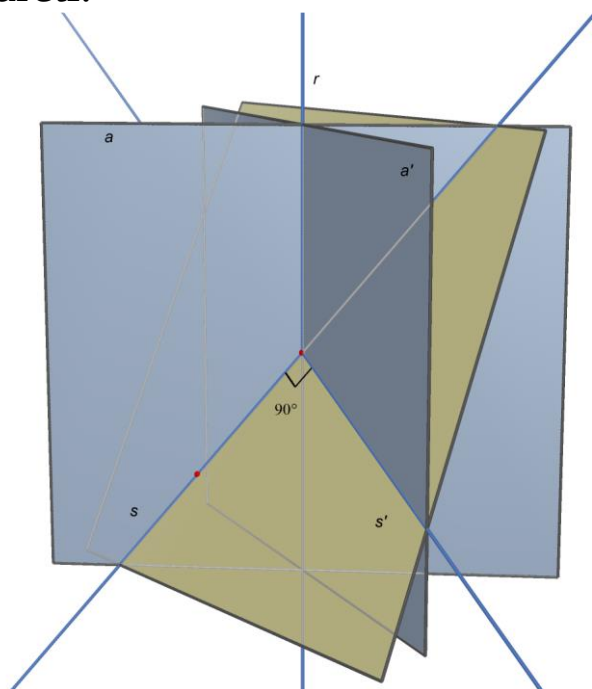
come verificare che due piani siano perpendicolari?

La risposta che spesso viene data alla domanda su come verificare se due pareti sono perpendicolari è:

se possiamo porre la squadra in modo tale che i due suoi cateti siano completamente a contatto con le due pareti, allora le pareti sono perpendicolari.



In effetti, dati comunque due piani che si intersecano in una retta, possiamo sempre porre la squadra in modo tale che i suoi due cateti stiano sulle due pareti.



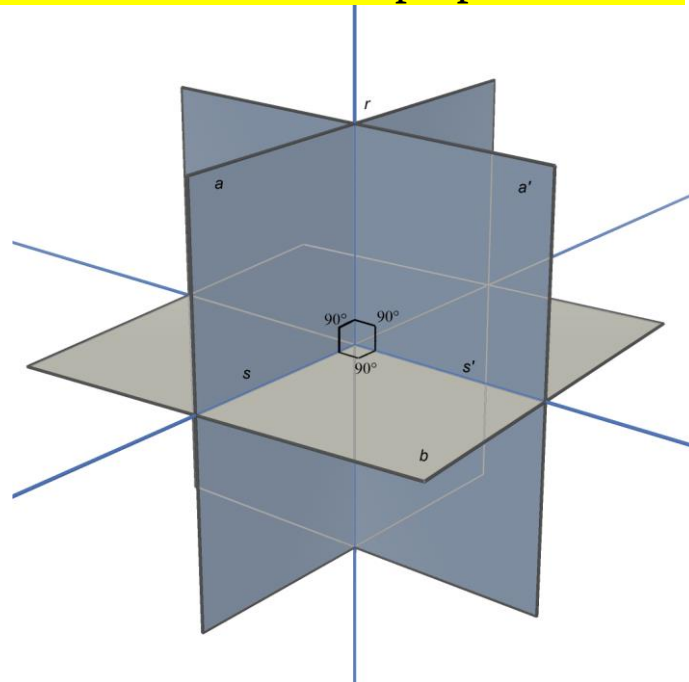
Ma allora avremmo dimostrato che i due piani sono sempre perpendicolari tra loro.
Ovviamente ciò è assurdo.

Da dove nasce l'errore?

Il fatto è che, sebbene siamo in grado di dire quando due piani sono perpendicolari, seppure in modo intuitivo, non sempre siamo in grado di dare una definizione di perpendicolarità tra piani.

Diamo allora la definizione di piani perpendicolari:

Definizione. Due piani a e a' che si intersecano in una retta r si dicono perpendicolari se un piano b perpendicolare alla retta r interseca i piani a e a' in rette s e s' perpendicolari.



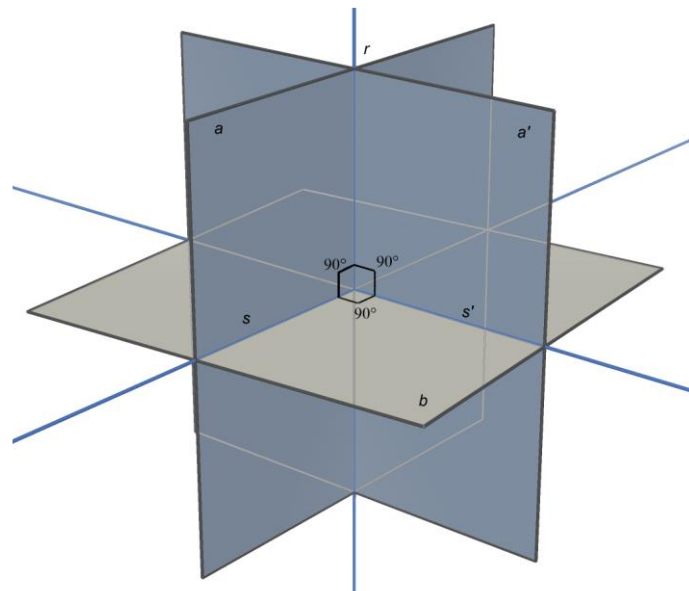
ATTENZIONE alla definizione. E' essenziale che il piano b sia perpendicolare alla retta r .

Ora capiamo l'errore che viene di solito fatto. Nasce dall'aver supposto che due piani perpendicolari, intersecati con un qualsiasi piano, formano sempre due rette perpendicolari.

RISPOSTA

Controlliamo se le nostre pareti sono perpendicolari usando squadra e matita.

- a) Fissiamo un punto P sullo spigolo r delle due pareti
- b) Poggiamo la squadra su una delle due pareti, che chiamiamo a , in modo tale che il vertice dell'angolo retto sia in P e un cateto sia su r ; disegniamo sulla parete a la retta contenente l'altro cateto della squadra, chiamiamo s questa retta.
- c) Poggiamo la squadra sull'altra parete, che chiamiamo a' , in modo tale che il vertice dell'angolo retto sia in P e un cateto sia su r ; disegniamo sulla parete a' la retta contenente l'altro cateto della squadra, chiamiamo s' questa retta.
- d) Le due pareti sono perpendicolari se e solo se possiamo far combaciare i due cateti della squadra con le rette s e s' .



Infatti, se ciò avviene, il piano b contenente le rette s e s' è perpendicolare allo spigolo r (perché contiene le rette s e s' che, per costruzione sono perpendicolari a r) e interseca i piani a e a' nelle rette s e s' che sono tra loro perpendicolari.

Domanda 5

Abbiamo posto i cardini di una porta su una retta perpendicolare al pavimento.

La porta è perpendicolare al pavimento? Perché?



RISPOSTA

In effetti la porta è perpendicolare al pavimento.

Esiste infatti il seguente

TEOREMA (Proposizione 18 del libro X1 degli Elementi di Euclide) Data una retta r perpendicolare ad un piano a , allora qualsiasi piano contenente la retta r è perpendicolare al piano a .

Osserviamo in particolare che da ciò deriva che, dato un punto A di un piano a , esistono infiniti piani passanti per A e perpendicolari al piano a . Sono tutti i piani contenenti la retta r passante per A e perpendicolare al piano a .

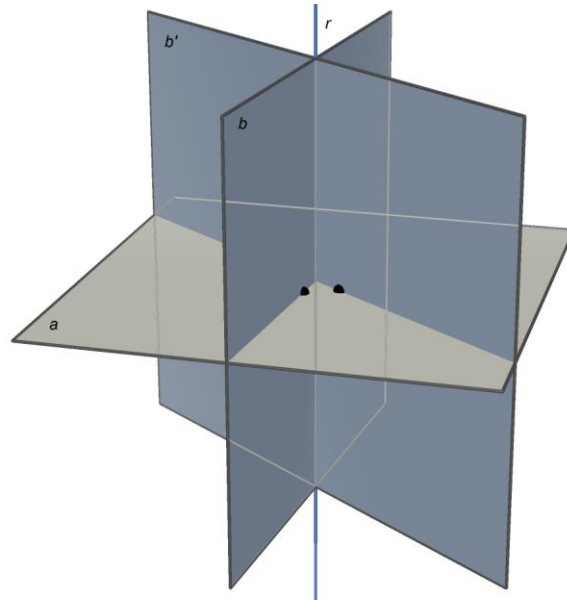
Domanda 6

Due pareti di una stanza sono entrambe perpendicolari al pavimento della stanza. Possiamo affermare che lo spigolo formato dalle due pareti è perpendicolare al pavimento? Perché?



VERSO LA RISPOSTA

Supponiamo che il pavimento sia contenuto in un piano a , una delle due pareti sia contenuta in un piano b , l'altra parete sia contenuta in un piano b' . Lo spigolo delle due pareti è quindi contenuto in una retta r .



Riformuliamo la domanda: se i piani b e b' contenenti le due pareti sono entrambi perpendicolari al piano a , contenente il pavimento, a retta r , contenente lo spigolo formato dalle due pareti, è perpendicolare al piano a ?

RISPOSTA

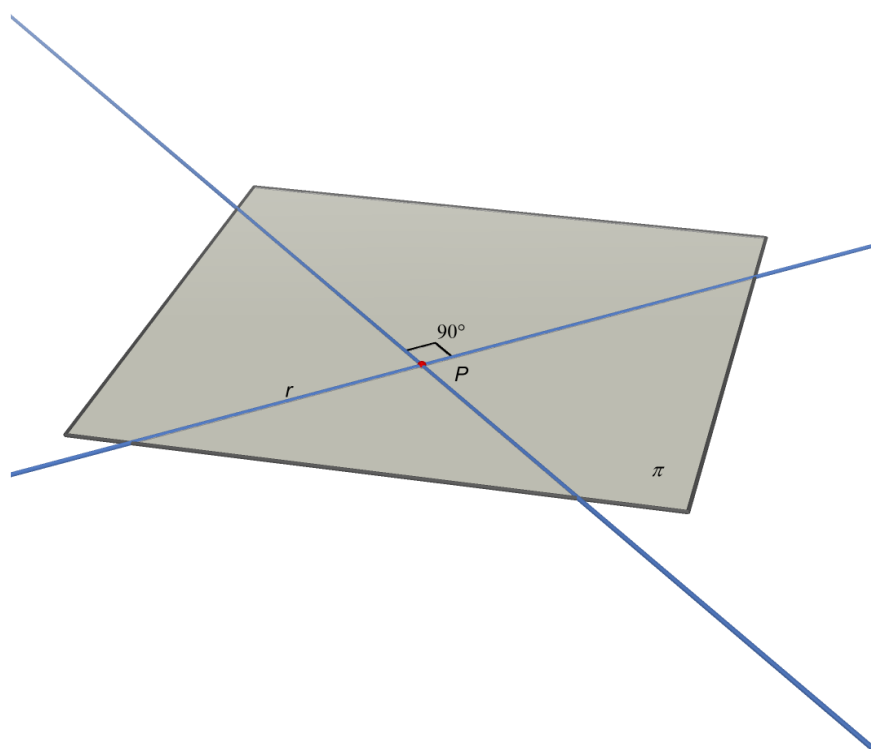
Lo spigolo determinato dalle due pareti è perpendicolare al pavimento. Ciò deriva dal seguente

TEOREMA (Proposizione 19 del libro XI degli Elementi di Euclide, pag. 904)

Se due piani b e b' , che si intersecano in una retta r , sono perpendicolari ad uno stesso piano a , allora la retta r è perpendicolare al piano a .

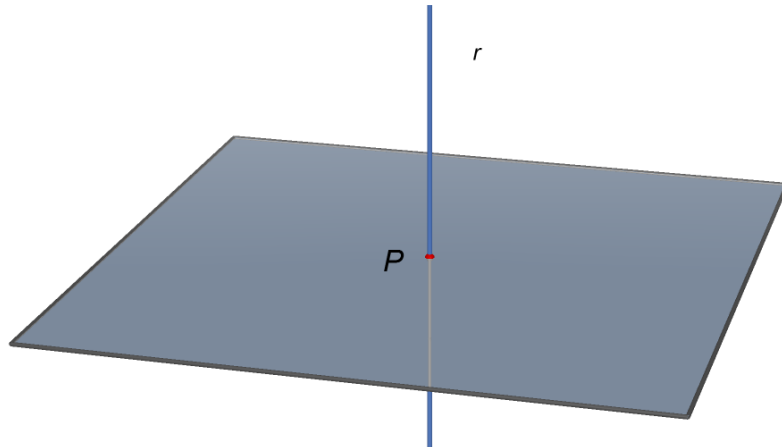
ALCUNE COSTRUZIONI

Data una retta r in un piano π e un punto P della retta r , con una squadra possiamo costruire la retta s appartenente al piano π , passante per P e perpendicolare alla retta r .



PROBLEMA

Data una retta r e un suo punto P costruire un piano passante per P e perpendicolare alla retta r .

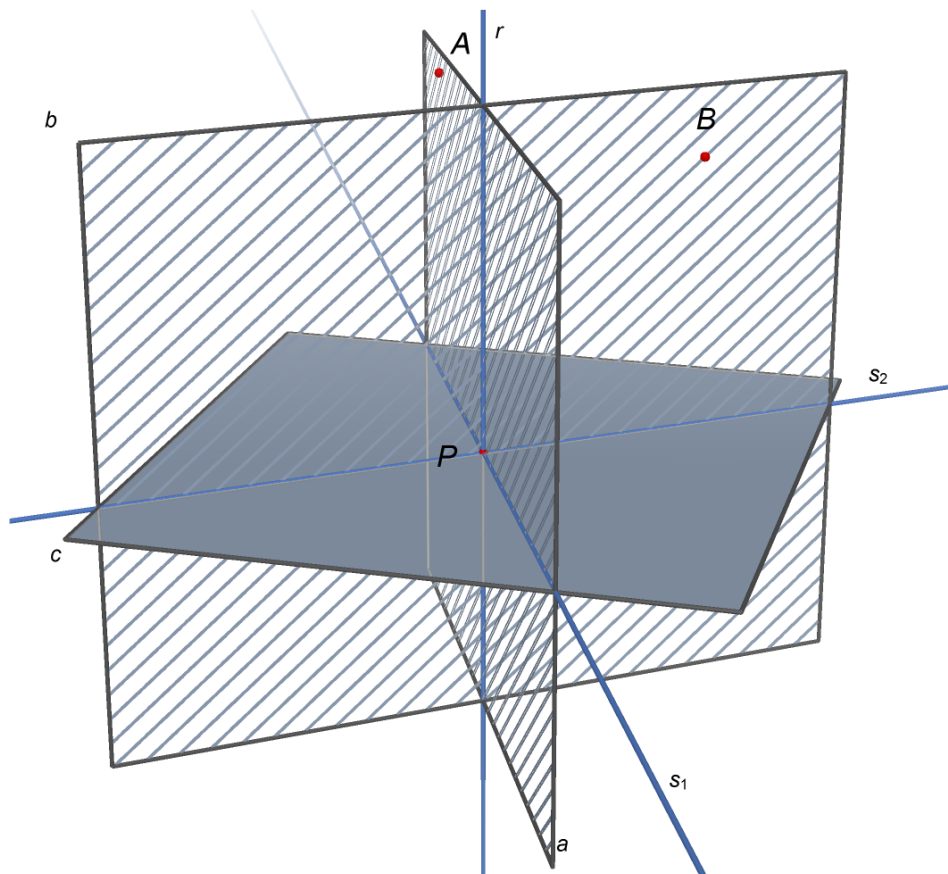


RISPOSTA

Fissiamo un punto A non appartenente alla retta r e consideriamo il piano a contenente r e A . In questo piano costruiamo la retta s_1 contenuta nel piano a , passante per P e perpendicolare a r .

Fissiamo un punto B non appartenente al piano a e consideriamo il piano b contenente r e B . In questo piano costruiamo la retta s_2 contenuta nel piano b , passante per P e perpendicolare a r .

Il piano c contenente le rette s_1 e s_2 è il piano cercato perché contiene ovviamente il punto P e contiene le rette s_1 e s_2 che sono, per costruzione, rette passanti per P ed entrambe perpendicolari alla retta r .

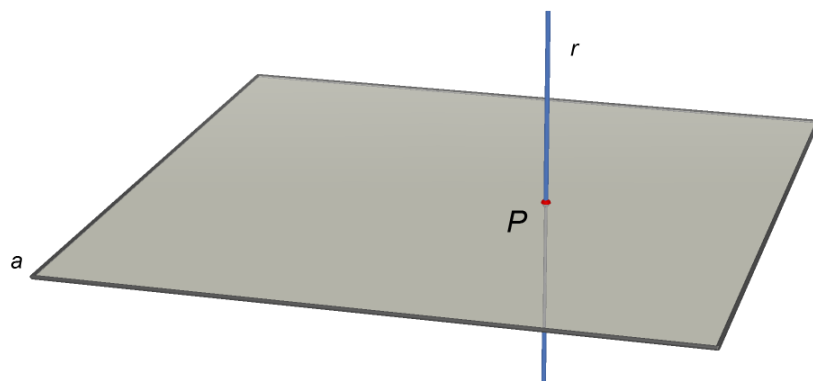


Ricordiamo che c'è il seguente teorema:

Teorema. Data una retta r e un suo punto P , esiste un solo piano passante per P e perpendicolare alla retta r .

PROBLEMA

Dato un piano a e un suo punto P , costruire una retta passante per P e perpendicolare al piano a .



RISPOSTA

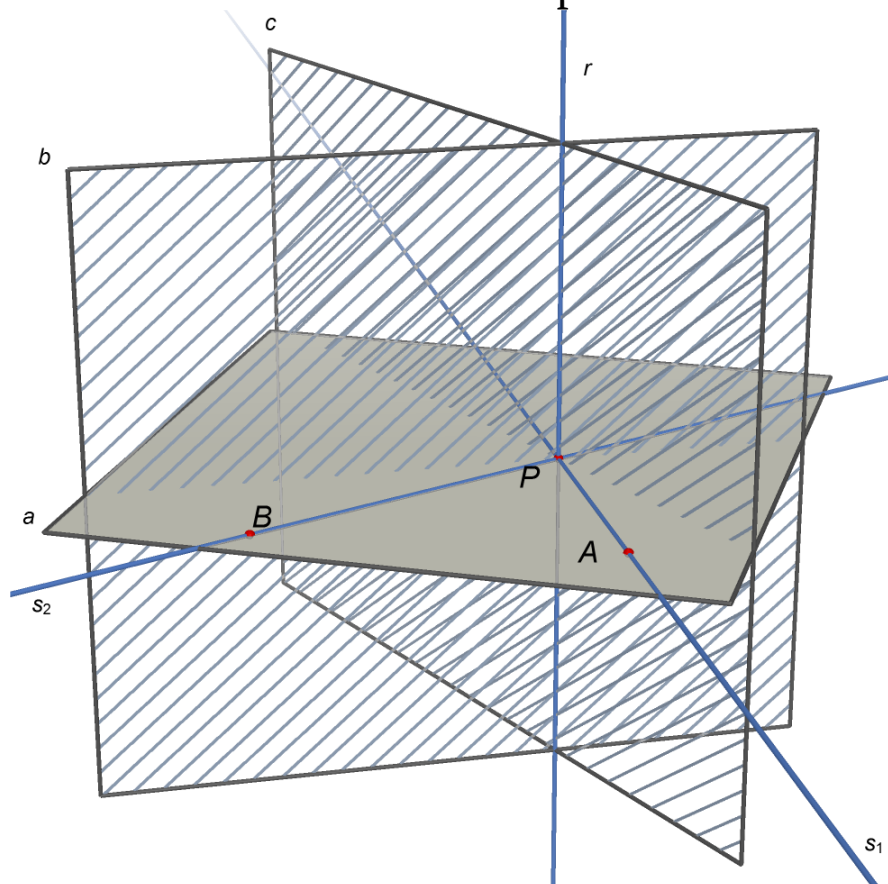
Consideriamo un punto A , diverso da P , sul piano a e la retta s_1 passante per A e P . Essa è contenuta nel piano a .

Costruiamo il piano b passante per P perpendicolare alla retta s_1 (abbiamo visto in precedenza come costruire questo piano)

Consideriamo un punto B , sul piano a , non appartenente alla retta s_1 e la retta s_2 passante per B e P . Essa è contenuta nel piano a .

Costruiamo il piano c passante per P perpendicolare alla retta s_2

Consideriamo la retta r intersezione dei piani b e c .



La retta r contiene ovviamente il punto P . Inoltre, dal momento che è perpendicolare sia a s_1 che s_2 , rette del piano a passanti per P , è perpendicolare al piano a . E quindi verifica le condizioni richieste.

Ricordiamo che c'è il seguente teorema.

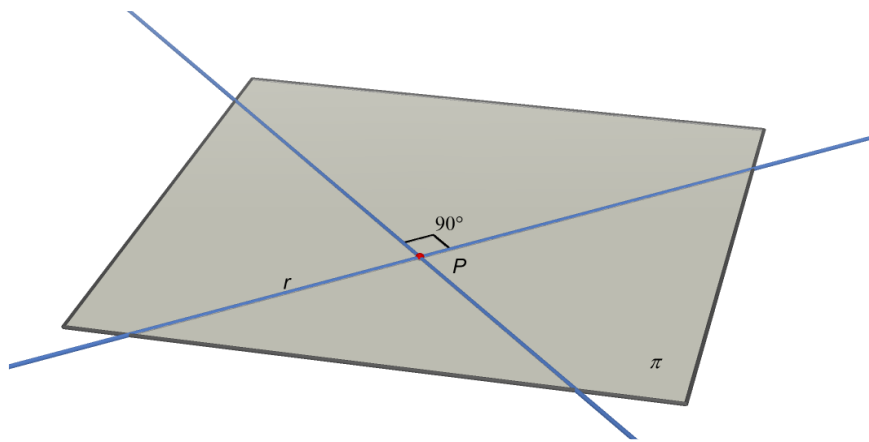
Teorema. Data un piano a e un suo punto P , esiste una sola retta passante per P e perpendicolare al piano a .

Nelle nostre due costruzioni abbiamo usato una squadra.

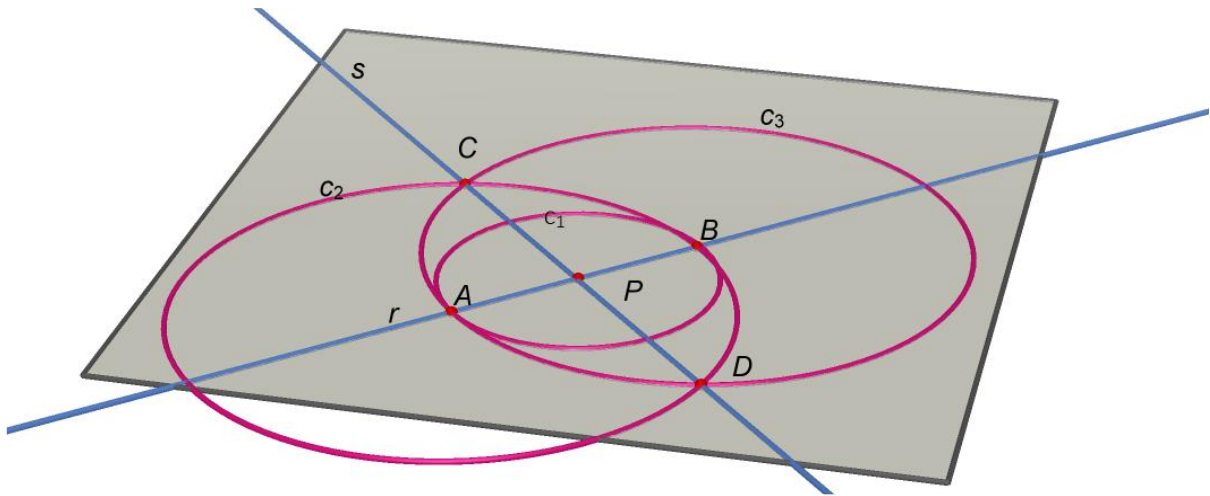
Di solito, seguendo Euclide, non si usa una squadra ma una riga non graduata e un compasso.

Problema

Data una retta r in un piano π e un punto P della retta r , costruire con riga e compasso la retta s appartenente al piano π , passante per P e perpendicolare alla retta r .



RISPOSTA



Costruiamo, sempre nel piano π :

- un punto A sulla retta r
- circonferenza c_1 di centro P passante per A
- punto B , distinto da A , di intersezione di c_1 con r
- circonferenza c_2 di centro A passante per B
- circonferenza c_3 di centro B passante per A
- punti C e D di intersezione di c_2 e c_3
- la retta s passante per C e D è la retta cercata.

Lasciamo questa ultima affermazione per esercizio.