Capitolo 10

Funzioni

10.1 Introduzione

Abbiamo raggruppato in questo capitolo alcune nozioni sulle funzioni che sono stati introdotti nel corso delle lezioni in vari momenti. La maggior parte di queste sono nozioni erano state già introdotte nel corso del primo anno.

10.2 Richiami sulle funzioni

Definizione 10.1 Dati due insiemi A e B, una **funzione** (o **applicazione**) tra A e B è una legge f che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento di B che viene indicato con $f(a)$. L'elemento $f(a)$ viene detto **immagine** di a attraverso f. Una funzione f tra A e B viene indicata con il simbolo $f : A \longrightarrow B$. L'insieme delle immagini degli elementi di a viene detto **immagine** di f. Esso viene indicato con il simbolo $f(A)$ o con il simbolo $\mathrm{Im} f$. Quindi $f(A) \subset B$. In altre parole:

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}$$

Dato $b \in B$, chiamiamo **controimmagine** (o **fibra**) di b il sottoinsieme di A dato dagli elementi di A le cui immagini coincidono con b. Tale sottoinsieme di A viene indicato con il simbolo $f^{-1}(b)$. In altre parole:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Definizione 10.2 Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ e dato $A' \subset A$ chiamiamo **immagine di** A' l'insieme delle immagini degli elementi di A'. Indichiamo questo insieme con il simbolo $f(A')$. Quindi:

$$f(A') = \{b \in B \mid \exists a' \in A' \text{ tale che } f(a') = b\}$$

Possiamo anche definire la **restrizione** della funzione f a A', che viene indicata con il simbolo $f|_{A'}$ (si dice f **ristretta** ad A'). Essa è la funzione ottenuta

considerando la funzione f solo sugli elementi di A'. La funzione $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$ è quindi definita da $f|_{A'}(a') = f(a') \ \forall a' \in A'$.
Si definisce anche la **funzione inclusione** $i : A' \longrightarrow A$ nel modo seguente $i(a') = a' \ \forall a' \in A'$ $\triangle$

Definizione 10.3 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva** (o **monomorfismo**) se elementi diversi hanno immagini diverse. Cioè:
f iniettiva $\Longleftrightarrow$ ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$).
O, equivalentemente:
f iniettiva $\Longleftrightarrow$ ($f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$). $\triangle$

Definizione 10.4 Dato un insieme finito A, indichiamo con $|A|$ il numero di elementi di A. $\triangle$

Esercizio E.10.1 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ iniettiva } \Longleftrightarrow \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| \leq 1$$

Definizione 10.5 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva** o **surgettiva** o **sopra** (o **epimorfismo**), se si ha $B = f(A)$. $\triangle$

Esercizio E.10.2 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ surgettiva } \Longleftrightarrow \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| \geq 1$$

Definizione 10.6 Una funzione si dice **biiettiva** o **biunivoca** se essa è iniettiva e suriettiva. $\triangle$

Esercizio E.10.3 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ biiettiva } \Longleftrightarrow \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| = 1$$

Esercizio E.10.4 Sia A l'insieme degli studenti. Consideriamo la funzione $f : A \longrightarrow N \cup \{0\}$ che associa ad ogni studente il numero degli esami del primo anno da lui superati. La funzione f è iniettiva, è surgettiva? Spiegare cosa è $f^{-1}(3)$.

Esercizio E.10.5 Dare un esempio di funzione non iniettiva e non surgettiva.
Dare un esempio di funzione iniettiva e non surgettiva.
Dare un esempio di funzione non iniettiva e surgettiva.
Dare un esempio di funzione iniettiva e surgettiva (cioè biunivoca).

Definizione 10.7 Dato un insieme A la **funzione identica** di A è la funzione $f : A \longrightarrow A$ definita da $f(a) = a \ \forall a \in A$. Di solito la funzione identica di A viene indicata con il simbolo id_A (o con il simbolo id se non vi sono dubbi sull'insieme su cui opera l'identità) o anche con il simbolo 1_A. $\triangle$

Teorema 10.8 *La funzione identica di un insieme A è biunivoca.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 10.9 *Dati $A' \subset A$, la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è iniettiva.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio E.10.6 Dimostrare che la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è surgettiva se e solo se $A' = A$.

Definizione 10.10 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, esse si dicono **uguali** se si ha:

$$\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$$

Nota 10.11 Dalla definizione precedente segue che date due funzioni
$f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ sono diverse se esiste $a \in A$ tale che $f(a) \neq g(a)$. △

Esercizio E.10.7 Siano date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, e sia $C \subset A$ e $C \neq A$.
Verificare la verità o falsità della seguente affermazione:

$$f|_C = g|_C \Longrightarrow f = g$$

10.3 Composizione di funzioni

Definizione 10.12 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, la **funzione composta** è la funzione $g \circ f : A \longrightarrow C$ definita da

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)] \quad \forall a \in A$$

Definizione 10.13 Data una funzione biunivoca $f : A \longrightarrow B$, la **funzione inversa** di f è la funzione:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

definita da:
$f^{-1}(b) = a$ dove $a \in A$ è tale che $f(a) = b$.

Nota 10.14 Il fatto che la funzione f sia biunivoca assicura che l'elemento a verificante la condizione richiesta esista e sia unico. △

Nota 10.15 Attenzione. Con il simbolo $f^{-1}(b)$ si indica sia la controimmagine di b attraverso una *qualsiasi* funzione f sia l'immagine di b attraverso la funzione f^{-1} inversa di una funzione f che sia *biunivoca*. △

Teorema 10.16 *La funzione inversa f^{-1} di una funzione biunivoca f è essa stessa biunivoca.*

DIMOSTRAZIONE . Lasciata per esercizio. ■

Esercizio E.10.8 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione biunivoca e sia $f^{-1} : B \longrightarrow A$ la sua inversa. Dimostrare che si ha: $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$.

Capitolo 11

Omomorfismi e matrici

11.1 Introduzione

Nel corso di Geometria è stato visto come associare una matrice ad un omomorfismo tra spazi vettoriali.
Rimandiamo al testo del corso per esempi e esercizi su ciò.
Il simbolismo compatto introdotto nel capitolo 8 ci permette di scrivere in altro modo formule già introdotte nel corso di geometria.
L'analisi della matrice associata ad un omomorfismo ci permette di avere informazioni sulle dimensioni del nucleo e dell'immagine di un omomorfismo.
Vediamo poi come varia la matrice associata ad un omomorfismo tra due spazi vettoriali al variare delle basi scelte nei due spazi vettoriali.
Vediamo infine la matrici associata alla composizione di omomorfismi.

11.2 Omomorfismi e matrici

Teorema 11.1 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E. Per ogni vettore*

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_q\mathbf{e}_q \quad \text{di } E$$

si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = b_1\eta(\mathbf{e}_1) + \cdots + b_q\eta(\mathbf{e}_q)$$

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Nota 11.2 La formula precedente con simbolismo compatto introdotto diventa:

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}\right] = (\eta(\mathbf{e}_1) \ldots \eta(\mathbf{e}_q))\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Osserviamo la formula precedente. Essa ci dice che, per determinare l'immagine attraverso η di un qualsiasi vettore $\mathbf{v}$ basta conoscere le sue coordinate $(b_1, \ldots, b_q)$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e le immagini dei vettori di tale base. Abbiamo pertanto il seguente :

Teorema 11.3 *Siano E e F due spazi vettoriali su un campo K. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E. Siano $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\}$ vettori qualsiasi di F. Allora esiste ed è unico un omomorfismo $\eta : E \longrightarrow F$ tale che si abbia:*

$$\eta(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, q$$

Esempio 11.4 Consideriamo lo spazio vettoriale R^2 e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonica di R^2. Sia W uno spazio vettoriale su R. Siano $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ due vettori di W. L'unico omomorfismo $\eta : R^2 \longrightarrow W$ tale che:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 \quad , \quad \eta(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_2$$

è dato da:

$$\eta[(a, b)] = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Infatti, poiché η deve essere un omomorfismo, si deve avere:

$$\eta[(a, b)] = \eta(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a\eta(\mathbf{e}_1) + b\eta(\mathbf{e}_2) = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Definizione 11.5 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo K. Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente. Definiamo **matrice associata ad η relativamente alle basi scelte** la matrice $A = (a_{ij}) \in M(K, p, q)$ avente come j-esima colonna le coordinate del vettore $\eta(\mathbf{e}_j)$ relative alla base $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$. Cioè:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{pj}\mathbf{f}_p \qquad\qquad j = 1, \ldots, q$$

Usando il simbolismo compatto, si ha quindi:

$$(\eta(\mathbf{e}_1) \ldots \eta(\mathbf{e}_q)) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A$$

Esempio 11.6 Si consideri l'omomorfismo $\eta : R^3 \longrightarrow R^2$ definito da $\eta[(x, y, z)] = (z, y)$.
Cerchiamo la matrice associata all'omomorfismo relativamente alle basi canoniche $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ di R^3 e R^2 rispettivamente. Si ha:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \eta[(1, 0, 0)] = (0, 0) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_2) = \eta[(0, 1, 0)] = (0, 1) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_3) = \eta[(0, 0, 1)] = (1, 0) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

La matrice associata a η relativamente alle basi canoniche è quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.11.1 Sia $\eta : M(R, 2, 2) \longrightarrow R^2$ definito da:

$$\eta\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+d, b+c)$$

i) Dimostrare che η è un omomorfismo tra spazi vettoriali su R.
ii) Determinare la matrice A associata ad η relativamente alle basi canoniche.

Esercizio E.11.2 Sia $\beta\ : R^2\ \longrightarrow C$ definito da:

$$\beta[(x, y)] = x + (x + y)i$$

i) Dimostrare che β è un omomorfismo tra spazi vettoriali su R.
ii) Determinare la matrice B associata a β relativamente alle basi canoniche.

Teorema 11.7 *Sia $\eta\ : E\ \longrightarrow\ F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo K. Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente e sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Allora, si ha:*

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta(b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_q\mathbf{e}_q) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Lasciata per esercizio. Basta applicare le formule viste in precedenza. ■

Nota 11.8 Usando il simbolismo compatto la formula precedente diventa:

$$\eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}\right] = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Definizione 11.9 Siano E e F spazi vettoriali su un campo K. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ una base di F.
Sia $A \in M(K, p, q)$. Si definisce **omomorfismo associato ad A relativamente alle basi** $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ l'omomorfismo definito da:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{pj}\mathbf{f}_p \qquad\qquad j = 1, \ldots, q$$

Esempio 11.10 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'omomorfismo $\eta' : R^3 \longrightarrow R^2$ associato ad A relativamente alle basi canoniche dei due spazi è tale che:

$$\eta'(\mathbf{e}_1) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}\ ,\ \eta'(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2\ ,\ \eta'(\mathbf{e}_3) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1$$

Quindi:

$$\eta'[(x,y,z)] = x\eta'(\mathbf{e}_1) + y\eta'(\mathbf{e}_2) + z\eta'(\mathbf{e}_3) = x\mathbf{0} + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_1 = (z,y)$$

Notiamo che l'omomorfismo η' coincide con l'omomorfismo η visto nell'esempio 11.6. △

Teorema 11.11 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$. Sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Allora:*
1) dim $\eta(E) = \operatorname{rk}(A)$
2) dim Ker $\eta = \dim\ E - \operatorname{rk}(A)$
da cui:
3) dim $E = \dim \operatorname{Ker}\ \eta + \dim\ \eta(E)$

Dimostrazione 1) Sappiamo che $\{\eta(\mathbf{e}_1), \dots, \eta(\mathbf{e}_q)\}$ è un insieme di generatori di $\eta(E)$. Per estrarre da questi una base, consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate di tali vettori relative alla base scelta in F. Tale matrice è proprio la matrice A. Dal teorema 4.5 del capitolo 5 segue la tesi.
2) Cerchiamo i vettori $\mathbf{v} \in E$ tali che $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Da cui:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Abbiamo un sistema omogeneo di p equazioni in q incognite. Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione uguale a $q -$ rango A. Da cui la tesi. ■

Nota 11.12 La dimostrazione appena data dà un modo concreto per determinare una base per il nucleo di η e una base per l'immagine di η. △

Esercizio E.11.3 Considerare l'omomorfismo dato in E.11.1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Esercizio E.11.4 Considerare l'omomorfismo dato in E.11.2. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Corollario 11.13 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi basi finite.*
Allora dim $\eta(E) \leq$ dim E.

Dimostrazione Applicare la parte 3) del teorema 11.11 ∎

Corollario 11.14 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi basi finite.*
Sia E' un sottospazio vettoriale di E. Allora dim $\eta(E') \leq$ dim E'.

Dimostrazione Applicare il corollario precedente alla funzione $f|_{E'}$. ∎

11.3 Cambio di base

Teorema 11.15 . *Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente e sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Quindi:*

$$\eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}\right] = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Siano $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_q\}$ e $\{\mathbf{f}'_1, \ldots, \mathbf{f}'_p\}$ altre basi di E e di F rispettivamente e sia A' la matrice associata ad η relativamente ad esse. Quindi:

$$\eta\left[(\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_q)\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}\right] = (\mathbf{f}'_1 \ldots \mathbf{f}'_p)A'\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}$$

Sia:

$$(\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_q) = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)M$$

Sia:

$$(\mathbf{f}'_1 \ldots \mathbf{f}'_p) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)N$$

Si ha allora:

$$A' = N^{-1}AM$$

Dimostrazione Si ha:

$$\eta\left[(\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_q)\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}\right] = \eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)M\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)AM\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} = (\mathbf{f}'_1 \ldots \mathbf{f}'_p)N^{-1}AM\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}$$

Da cui la tesi. ∎

Esercizio E.11.5 Sia $L : S(R,2) \longrightarrow R^2[x]$ definito da:

$$L(B) = \text{tr } B + (\text{tr}' B)x$$

dove:
tr B=somma degli elementi della diagonale principale di B,
tr'B=somma degli elementi della diagonale secondaria di B.
(Ricordiamo che $S(R,2)$ è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali).
1) Dimostrare che L è un omomorfismo.
2) Dimostrare che:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $S(R,2)$.
Questa base viene detta **base canonica** di $S(R,2)$.
3) Determinare la matrice A associata a L relativamente alla base canonica di $S(R,2)$ e alla base canonica di $R^2[x]$.
4) Dimostrare che:

$$\left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $S(R,2)$.
5) Dimostrare che $\{\mathbf{f}_1 = 1 + x, \mathbf{f}_2 = 1 - x\}$ è una base di $R^2[x]$.
6) Determinare la matrice A' associata a L relativamente alle basi date in 4) e 5).
Si suggerisce di rispondere alla domanda 6) in due modi:
a) determinando direttamente la matrice A';
b) determinando la matrice A' utilizzando la matrice A e il teorema 11.15.

11.4 Composizione di omomorfismi

Teorema 11.16 *Siano E, F, G spazi vettoriali su un campo K aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$, $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$.*
Sia $\alpha : E \longrightarrow F$ un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ la matrice A.
Sia $\beta : F \longrightarrow G$ un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ e $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$ la matrice B. Allora l'omomorfismo $\beta \circ \alpha$ ha come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$ la matrice BA.

Dimostrazione Poiché A è la matrice associata ad α si ha:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Poichè B è la matrice associata a β, si ha:

$$\beta\left[(\mathbf{f}_1\dots\mathbf{f}_p)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_p\end{pmatrix}\right]=(\mathbf{g}_1\dots\mathbf{g}_r)B\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_p\end{pmatrix}$$

Ma allora:

$$(\beta\circ\alpha)\left[(\mathbf{e}_1\dots\mathbf{e}_q)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}\right]=\beta\left[\alpha\left[(\mathbf{e}_1\dots\mathbf{e}_q)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}\right]\right]=$$

$$=\beta\left[(\mathbf{f}_1\dots\mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}\right]=(\mathbf{g}_1\dots\mathbf{g}_r)BA\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}$$

Da cui la tesi. ■

Esercizio E.11.6 Sia $L' : M(R,2,2) \longrightarrow S(R,2)$ definito da:

$$L'(B)=B+^tB$$

1) Dimostrare che L' è un omomorfismo.
2) Determinare la matrice associata a L' relativamente alle basi canoniche.
3) Dato l'omomorfismo L definito nell'esercizio E.11.5, determinare la matrice associata a $L\circ L'$ relativamente alle basi canoniche.
Si suggerisce di rispondere alla domanda 3) in due modi:
a) determinando direttamente la matrice associata;
b) determinando la matrice associata utilizzando il teorema 11.16 e le matrici associate a L e a L' relativamente alle basi canoniche che sono state calcolate in precedenza.

Esercizio E.11.7 Determinare basi per il nucleo e l'immagine degli omomorfismi $L, L', L\circ L'$ definiti negli esercizi E.11.5 e E.11.6.

Esercizio E.11.8 Sia $\gamma=\beta\circ\eta$ dove η e β sono gli omomorfismi definiti negli esercizi E.11.1 e E.11.2.
i) Determinare la matrice C associata ad γ relativamente alle basi canoniche.
ii) Determinare nucleo e immagine di γ.

Teorema 11.17 *Siano $A\in M(K,p,q)$ e $B\in M(K,r,p)$. Allora:*

$$\mathrm{rk}(BA)\le\mathrm{rk}(A)\quad,\quad\mathrm{rk}(BA)\le\mathrm{rk}(B)$$

Dimostrazione Diamo solo alcuni suggerimenti lasciando la dimostrazione completa come esercizio.
Si considerino gli omomorfismi $\alpha : K^q\longrightarrow K^p$ e $\beta : K^p\longrightarrow K^r$ associati rispettivamente alle matrici A e B relativamente alle base canoniche dei tre spazi

vettoriali.
Si ha

$$\operatorname{rk} A = \dim \alpha(K^q)\ ,\ \operatorname{rk} B = \dim \beta(K^p)\ ,\ \operatorname{rk} BA = \dim(\beta \circ \alpha)(K^q)$$

Notiamo poi che $(\beta \circ \alpha)(K^q) \subset \beta(K^q)$ e quindi $\operatorname{rk} BA \leq \operatorname{rk} B$.
Inoltre $(\beta \circ \alpha)(K^q) 0 \beta(\alpha(K^q)))$ e quindi dal teorema 11.14 segue $\operatorname{rk} BA \leq \operatorname{rk} A$.■

Esercizio E.11.9 Determinare due matrici A e B tali che:

$$\operatorname{rk}(BA) < \operatorname{rk}(A) \quad , \quad \operatorname{rk}(BA) < \operatorname{rk}(B)$$

Esercizio E.11.10 Sia $A \in M(K, m, n)$ e $B \in M(K, r, m)$ e sia $\operatorname{rk}(A) = m$. Dimostrare che allora si ha $\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk}(B)$.
Suggerimento. Pensare le matrici come omomorfismi. Uno di essi è surgettivo.

Capitolo 12

Isomorfismi

12.1 Introduzione

Richiamiamo la definizione di isomorfismo tra spazi vettoriali e alcune sue proprietà. Anche questo è un argomento già introdotto nel corso di geometria. Rimandiamo quindi a quest'ultimo per ulteriori esempi e esercizi.

12.2 Isomorfimi tra spazi vettoriali

Definizione 12.1 Un **isomorfismo** tra spazi vettoriali è un omomorfismo tra spazi vettoriali che sia una corrispondenza biunivoca. Due spazi vettoriali per i quali esista un isomorfismo tra essi si dicono **isomorfi.** $\triangle$

Esercizio E.12.1 Si consideri l'applicazione $\eta : R^2[x] \longrightarrow R^2$ definita da

$$\eta(a + bx) = (a, b)$$

Dimostrare che è un isomorfismo.

Esercizio E.12.2 Dimostrare che lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ dei vettori di un piano π applicati in un suo punto O è isomorfo allo spazio vettoriale R^2.
Suggerimento. Si consideri una base di $V^2(\pi, O)$.

Esercizio E.12.3 Dimostrare che lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un punto O è isomorfo allo spazio vettoriale R^3.
Suggerimento. Si consideri una base di $V^3(O)$.

Teorema 12.2 *Se due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione allora essi sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE . Siano V e W spazi vettoriali su un campo K. Supponiamo che essi abbiano dimensione uguale a n .
Sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V.

Sia $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base di W.
Sia:

$$f : V \longrightarrow W$$

definita da:

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_n\mathbf{w}_n$$

Si verifica facilmente che f è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

Nota 12.3 Da ciò segue che, se V è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n su un campo K, allora V è isomorfo a K^n. △

Il seguente teorema è l'inverso del teorema 12.2.

Teorema 12.4 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e se W è uno spazio vettoriale isomorfo a V, allora le dimensioni di V e W sono uguali.*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Esercizio E.12.4 Si segua la dimostrazione del teorema 12.2 per definire un isomorfismo tra $R^2[x]$ e R^2 utilizzando le basi canoniche di ambedue gli spazi. Notare che l'isomorfismo che si ottiene non è altro che l'isomorfismo assegnato nell'esercizio E.12.1.

Esercizio E.12.5 Si segua la dimostrazione del teorema 12.2 per definire un isomorfismo tra $R^2[x]$ e R^2 utilizzando per $R^2[x]$ la base di Lagrange associata ai punti 0 e 1 e per R^2 la base canonica. Notare che l'isomorfismo che si ottiene è diverso da quello ottenuto nell'esercizio precedente.

Nota 12.5 Per definire un isomorfismo tra spazi vettoriali aventi la stessa dimensione si è fatto ricorso alle basi degli spazi vettoriali. Cambiando base cambia l'isomorfismo (vedere esercizio precedente). Per questa ragione l'isomorfismo si dice **non canonico.** △

Teorema 12.6 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K di dimensione finita aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q\}$. Sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. L'omomorfismo η è un isomorfismo se e solo se la matrice A è invertibile.*
Inoltre, se η è un isomorfismo, la matrice associata all'isomorfismo η^{-1} relativamente alle basi date è la matrice A^{-1}.

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Esercizio E.12.6 Dimostrare i seguenti teoremi:
1) $A \in M(K, p, q)$ e $B \in GL(K, p) \Longrightarrow \operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} A$
2) $A \in GL(K, q)$ e $B \in GL(K, r, q) \Longrightarrow \operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} B$
Suggerimento. In 1) pensare A come un omomorfismo e B come un isomorfismo. In 2) viceversa.