

## Capitolo 13

# Spazio degli omomorfismi

### 13.1 Introduzione

Ecco un argomento totalmente nuovo.

Abbiamo visto che ad ogni omomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione finita possiamo associare una matrice e viceversa.

Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli omomorfismi tra due spazi vettoriali e lo spazio vettoriale delle matrici.

Introduciamo ora una struttura di spazio vettoriale all'insieme degli omomorfismi. In tal modo abbiamo un isomorfismo tra lo spazio vettoriale degli omomorfismi e lo spazio vettoriale delle matrici.

In virtù di questo isomorfismo possiamo determinare alcune proprietà degli omomorfismi leggendole come proprietà delle matrici.

### 13.2 Spazio degli omomorfismi

**Definizione 13.1** Siano  $E$  e  $F$  spazi vettoriali su un campo  $K$ . Sia  $\text{Hom}(E, F)$  l'insieme degli omomorfismi tra lo spazio vettoriale  $E$  e lo spazio vettoriale  $F$ . Definiamo in  $\text{Hom}(E, F)$  una operazione di addizione nel seguente modo: dati gli omomorfismi  $\alpha : E \longrightarrow F$  e  $\beta : E \longrightarrow F$  definiamo:

$$\alpha + \beta : E \longrightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che  $\alpha + \beta$  è un omomorfismo.

Definiamo in  $\text{Hom}(E, F)$  una operazione di moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo:

dato l'omomorfismo  $\alpha : E \longrightarrow F$  e l'elemento  $k \in K$ , definiamo:

$$k\alpha : E \longrightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(k\alpha)(\mathbf{v}) = k\alpha(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che  $k\alpha$  è un omomorfismo.  $\triangle$

**Teorema 13.2** *L'insieme  $\text{Hom}(E, F)$  con le operazioni di cui sopra è uno spazio vettoriale.*

**DIMOSTRAZIONE** Non diamo tutta la dimostrazione.

Ci limitiamo a far notare che il vettore nullo di  $\text{Hom}(E, F)$  è l'omomorfismo che associa ad ogni vettore  $\mathbf{v}$  di  $E$ , il vettore nullo di  $F$ . Questo omomorfismo viene ovviamente chiamato **omomorfismo nullo**.

Dato poi  $\eta \in \text{Hom}(E, F)$ , il suo opposto è l'omomorfismo  $(-1)\eta$ .

La dimostrazione di queste due proprietà viene lasciata per esercizio.

La dimostrazione delle altre proprietà di uno spazio vettoriale non è particolarmente istruttiva e quindi viene omessa (leggi: non fa parte del programma del corso). ■

**Teorema 13.3** *Siano  $E$  e  $F$  spazi vettoriali su un campo  $K$ .*

*Siano  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$  e  $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$  basi di  $E$  e  $F$  rispettivamente.*

*Si consideri l'applicazione:*

$$\psi : \text{Hom}(E, F) \longrightarrow M(K, p, q)$$

*che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.*

*Allora:*

- l'applicazione  $\psi$  è un isomorfismo tra spazi vettoriali;
- l'isomorfismo inverso di  $\psi$  è l'applicazione che associa ad ogni matrice l'omomorfismo associato ad essa relativamente alle basi date.

*Da tutto ciò segue inoltre:*

$$\dim \text{Hom}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

**DIMOSTRAZIONE** Una volta che si è ben compreso come si associa una matrice ad un omomorfismo, la dimostrazione è molto più semplice di quanto si possa pensare a prima vista. Viene pertanto lasciata per esercizio. ■

**Nota 13.4** L'isomorfismo appena definito dipende dalla scelta delle basi. In altre parole, se si cambiano le basi, cambia l'isomorfismo. Per questa ragione l'isomorfismo viene detto **non canonico**.  $\triangle$

**Esercizio di base EB.13.1** Consideriamo in  $R^3$  lo spazio vettoriale  $\pi$  formato dai vettori  $(x, y, z)$  tali che  $x + y + z = 0$ .

1) Dimostrare che l'insieme  $H'$  degli omomorfismi  $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$  tali che  $\pi \subseteq \ker \eta$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Hom}(R^3, R^4)$ .

2) Determinare la dimensione di  $H'$ .  $\triangle$

### 13.3 Esercizi

**Esercizio E.13.1** Siano  $E$  e  $F$  spazi vettoriali su un campo  $K$ . Sia  $F'$  un sottospazio vettoriale di  $F$ . Sia  $H''$  il sottoinsieme di  $\text{Hom}(E, F)$  formato da tutti gli omomorfismi aventi l'immagine contenuta in  $F'$ .

Dimostrare che  $H''$  è un sottospazio vettoriale di  $\text{Hom}(E, F)$ .

**Esercizio E.13.2** Sia  $F'$  il sottospazio vettoriale di  $R^4$  così definito:

$$F' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Sia  $H''$  il sottospazio vettoriale di  $\text{Hom}(R^3, R^4)$  formato da tutti gli omomorfismi aventi l'immagine contenuta in  $F'$ .

Determinare la dimensione di  $H''$ .

**Esercizio E.13.3** Sia  $\pi$  il sottospazio vettoriale di  $R^3$  definito in EB.13.1.

Sia  $F'$  il sottospazio vettoriale di  $R^4$  definito in E.13.2. Sia  $H'''$  il sottospazio vettoriale di  $\text{Hom}(R^3, R^4)$  formato da tutti gli omomorfismi il cui nucleo contiene  $\pi$  e aventi l'immagine contenuta in  $F'$ .

Determinare la dimensione di  $H'''$ .

### 13.4 Soluzioni degli esercizi di base

**Soluzione dell'esercizio di base EB.13.1** 1) Ovviamente l'omomorfismo nullo appartiene a  $H'$ .

Dimostriamo ora che  $H'$  è chiuso rispetto all'addizione. Siano  $\eta$  e  $\beta$  elementi di  $H'$ . Quindi:

$$\eta(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \pi$$

Dobbiamo dimostrare che si ha  $\eta + \beta \in W$ .

Per ogni  $\mathbf{v} \in \pi$ , si ha:

$$(\eta + \beta)(\mathbf{v}) = \eta(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Dimostriamo ora che  $H'$  è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Dobbiamo cioè dimostrare che, per ogni  $k \in R$ , si ha  $k\eta \in H'$ . Si ha:

$$(k\eta)(\mathbf{v}) = k(\eta(\mathbf{v})) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Abbiamo dimostrato che  $H'$  è un sottospazio vettoriale.

2) Dobbiamo ora determinare la dimensione di  $H'$ . Per far ciò, ci è utile vedere come è fatto un omomorfismo di  $H'$ .

Sappiamo che, per definire un omomorfismo  $\eta : R^3 \rightarrow R^4$ , è sufficiente definire le immagini dei vettori di una base di  $R^3$ . Poichè noi vogliamo che si abbia  $\pi \subseteq \ker \eta$  ci conviene scegliere una base di  $R^3$  che abbia due vettori in  $\pi$ . Consideriamo pertanto una base di  $\pi$ .

Sia  $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)\}$  una base di  $\pi$ . Completiamo tale base aggiungendo ad essa un vettore linearmente indipendente. Sia, per esempio:

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\}$$

una base di  $R^3$ .

Un omomorfismo  $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$  appartiene a  $H'$  se e solo se:

$$\eta(\mathbf{v}_1) = \eta(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

Notiamo inoltre che non abbiamo alcuna condizione su  $\eta(\mathbf{v}_3)$ .

La matrice associata ad un omomorfismo  $\eta \in H'$  relativamente alla base di  $R^3$  di cui sopra e alla base canonica di  $R^4$  è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora l'isomorfismo

$$\psi : \text{Hom}(R^3, R^4) \longrightarrow M(R, 4, 3)$$

definito in 13.3 che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.

L'immagine attraverso  $\psi$  di  $H'$  è dato sottospazio  $M'$  di  $M(R, 4, 3)$  formato dalle matrici di cui sopra.

Per determinare quindi la dimensione di  $H'$  basta determinare la dimensione di  $M'$ .

Si verifica facilmente che  $M'$  ha dimensione uguale a 4. Quindi  $\dim H' = 4$ .

## 13.5 Soluzioni degli esercizi

**Soluzione dell'esercizio E.13.1** L'omomorfismo nullo ovviamente appartiene a  $H''$ .

La chiusura di  $H''$  rispetto all'addizione si dimostra facilmente sfruttando il fatto che  $F'$  è un sottospazio vettoriale di  $F$  e che quindi è chiuso rispetto all'addizione.

Altrettanto facilmente si dimostra la chiusura di  $H''$  rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

**Soluzione dell'esercizio E.13.2** Per determinare la dimensione di  $H''$  ci si comporta essenzialmente come nell'esercizio EB.13.1: si passa alle matrici associate agli omomorfismi di  $H''$ .

Ovviamente conviene scegliere in  $R^3$  e in  $R^4$  basi opportune.

In  $R^3$  possiamo scegliere una base qualsiasi; per esempio la base canonica.

In  $R^4$  invece ci conviene scegliere una base contenente come primi vettori i vettori di una base di  $F'$ .

Si dimostra facilmente che  $F'$  ha dimensione uguale a 2.

Prendiamo quindi una base di  $R^4$  formata da due vettori formanti una base di  $F$  e da altri due vettori.

Le matrici associate agli omomorfismi di  $H''$  relativamente alla base canonica di  $R^3$  e alla base scelta di  $R^4$  sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando come in EB.13.1 si dimostra che  $H''$  ha dimensione uguale a 6.

**Soluzione dell'esercizio E.13.3** Si scelga in  $R^3$  una base opportuna ispirandosi al procedimento usato in EB.13.1.

Si scelga in  $R^4$  una base opportuna ispirandosi al procedimento usato in E.13.2.

Le matrici associate agli omomorfismi di  $H'''$  relativamente a tali basi sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando come in EB.13.1 si dimostra che  $H''$  ha dimensione uguale a 2.