Capitolo 14

Endomorfismi tra spazi vettoriali

14.1 Introduzione

Studiamo ora un caso particolare di omomorfismi: gli omomorfismi di uno spazio vettoriale in se stesso.
Questo argomento è stato studiato in parte nel corso di geometria 2. Nel primo paragrafo riprendiamo brevemente argomenti già noti. Rimandiamo quindi ai testi del corso di geometria per esempi ed esercizi.
Nel secondo paragrafo trattiamo invece un argomento poco trattato nel corso di geometria: le matrici simili.

14.2 Endomorfismi

Definizione 14.1 Dato uno spazio vettoriale E su un campo K, un **endomorfismo di** E è un omomorfismo di E in E. $\triangle$

Nota 14.2 Gli endomorfismi sono quindi particolari omomorfismi. Valgono quindi per essi i teoremi visti per gli omomorfismi. In particolare, fissata una base di E, possiamo associare ad ogni endomorfismo di E una matrice quadrata. $\triangle$

Teorema 14.3 *Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K.*
Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata a α relativamente a tale base.
Si ha allora:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. ■

Teorema 14.4 *Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K. Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata ad α relativamente ad essa.*
Sia $\{\mathbf{e'}_1, \dots, \mathbf{e'}_n\}$ un'altra base di E e sia A' la matrice associata ad α relativamente ad essa. Sia:

$$(\mathbf{e'}_1 \dots \mathbf{e'}_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)M$$

Si ha allora:

$$A' = M^{-1}AM$$

DIMOSTRAZIONE . È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. ■

14.3 Matrici simili

Definizione 14.5 Due matrici $A \in M(K, n, n)$ e $B \in M(K, n, n)$ si dicono *simili* (in simboli $A \sim B$) se

$$\exists M \in GL(K, n) \mid B = M^{-1}AM$$

Teorema 14.6 *La relazione di similitudine $\sim$ in $M(K, n, n)$ è una relazione di equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Dal teorema 14.4 segue:

Teorema 14.7 *Due matrici sono simili se e solo se sono matrici associate ad uno stesso endomorfismo relativamente a basi eventualmente differenti.*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Da ciò segue:

Teorema 14.8 *Matrici simili hanno stesso rango.*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Teorema 14.9 *Se la matrice A è simile alla matrice B, allora, per ogni $n \in N$, la matrice A^n è simile alla matrice B^n.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.14.1 Le seguenti due matrici sono simili?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.14.1 Si verifica facilmente che entrambe le matrici hanno rango uguale a 2. Ma ciò non ci garantisce che A e B siano simili. Notiamo però che si ha $A^2 = 0$ e $B^2 \neq 0$ e quindi le matrici A^2 e B^2 non sono simili. Da cui segue che le matrici A e B non sono simili.

14.5 Esercizi

Esercizio E.14.1 Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante.

Esercizio E.14.2 La proprietà precedente è invertibile?
In altre parole: matrici aventi lo stesso determinante sono simili?

Esercizio E.14.3 Dimostrare il seguente teorema.
Fissato $k \in K$, l'unica matrice simile alla matrice kI, dove I è la matrice identica, è la matrice kI stessa.

Esercizio E.14.4 Matrici aventi lo stesso rango sono simili?

Esercizio E.14.5 Dimostrare il seguente teorema.
Se A e B sono sono simili e A è invertibile allora anche B è invertibile. Inoltre A^{-1} è simile a B^{-1}.

Esercizio E.14.6 Dimostrare che le seguenti due matrici sono simili nel campo dei reali:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento. Sia $f : R^2 \longrightarrow R^2$ l'endomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Se A è simile a B vuol dire che è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di R^2 tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B. Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

14.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.14.1 Se $A \sim B$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $A = M^{-1}BM$.
Per dimostrare quel che vogliamo si usa allora il teorema di Binet ricordando che si ha $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ (dimostrare quest'ultima formula).

Soluzione dell'esercizio E.14.2 La risposta è no. Ecco un controesempio. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante nullo. Esse però non sono simili perché hanno rango differente.

Soluzione dell'esercizio E.14.3 Se $A \sim kI$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $A = M^{-1}kIM$.
Ma allora si ha $A = M^{-1}kIM = kM^{-1}IM = kM^{-1}M = kI$.

Soluzione dell'esercizio E.14.4 Matrici aventi lo stesso rango non sono necessariamente simili. Controesempio. Le matrici $2I$ e $3I$ sono ovviamente invertibili. Hanno quindi lo stesso rango. Dall'esercizio precedente segue però che non sono simili.

Soluzione dell'esercizio E.14.5 Se $A \sim A'$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM = A'$.
Inoltre, se A è invertibile, si ha $\det A \neq 0$. Applicando quindi il teorema di Binet si ha ...
Dimostriamo ora che le inverse di A e A' sono simili.
Si ha:

$$A'^{-1} = (M^{-1}AM)^{-1} = MA^{-1}M^{-1}$$

e quindi ...

Soluzione dell'esercizio E.14.6 Dal suggerimento dato segue che dobbiamo determinare due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di R^2 che siano linearmente indipendenti e tali che:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

Dobbiamo quindi determinare un vettore $\mathbf{v}_2 \in \ker\ f^2 - \ker\ f$. Osserviamo (esercizio) che da ciò segue $\mathbf{v}_1 \in \ker\ f - \{\mathbf{0}\}$.
Mostriamo inoltre che segue anche che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.
Sia infatti $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Applicando f si ottiene:
$\mathbf{0} = f(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = af(\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{v}_2) = b\mathbf{v}_1$ da cui segue, essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, che $b = 0$. Quindi $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1$; ma si ha anche $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e quindi $a = 0$. Lasciamo al lettore la determinazione di $\mathbf{v}_2$ (a tal scopo calcolare A^2) e quindi di $\mathbf{v}_1$.

Capitolo 15

Matrici a blocchi

15.1 Introduzione

Studiamo ora un argomento non trattato nel corso si geometria: le matrici a blocchi.

15.2 Matrici a blocchi

Definizione 15.1 Sia $A \in M(K, p+q, p+q)$, $B_1 \in M(K, p, p)$ e $B_2 \in M(K, q, q)$. Diciamo che la matrice A è una matrice formata da due blocchi B_1 e B_2 (in simboli $A = bl(B_1, B_2)$, se:
1) la matrice B_1 è il minore di A formato dalle prime p righe e colonne,
2) la matrice B_2 è il minore di A formato dalle ultime q righe e colonne,
3) tutti gli elementi di A non appartenenti ai due minori B_1 e B_2 sono uguali a 0. $\triangle$

Esempio 15.2 La matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

è formata da due blocchi. Uno di ordine 3 e uno di ordine 2. $\triangle$

Esercizio di base EB.15.1 Suddividere in blocchi la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 15.3 La definizione di matrice a due blocchi si estende a matrici a n blocchi. Usiamo il simbolo $A = bl(B_1, B_2, \dots, B_n)$. △

Esempio 15.4 La seguente matrice è a tre blocchi.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{1} & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \\ 0 & \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Nota 15.5 Abbiamo suddiviso la matrice A dell'esempio precedente in tre blocchi. Notiamo che ne avremmo potuto darne anche altre suddivisoni in blocchi. Avremmo infatti potuto considerare la matrice A suddivisa in due blocchi. Il primo blocco formato dalle prime tre righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime due righe e colonne. Un'altra suddivisione di A in due blocchi è data dal primo blocco formato dalle prime due righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime tre righe e colonne. △

Definizione 15.6 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K. Un sottospazio V di E si dice **invariante** per η se si ha $\eta(V) \subset V$.
Pertanto, se V è un sottospazio invariante per η si può considerare la restrizione di η a V:

$$\eta|_V : V \longrightarrow V$$

Chiaramente è un endomorfismo di V. △

Esempio 15.7 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice formata da due blocchi di ordine 2.
Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ di E.
Sia E_1 il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.
Sia E_2 il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$.
Si osserva (esercizio) che le immagini di $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ sono entrambe contenute in E_1.
Da ciò segue (esercizio) che l'immagine di E_1 è contenuta in E_1. Pertanto il sottospazio E_1 è invariante.
In modo analogo (esercizio) si verifica che il sottospazio E_2 è invariante.
Si consideri ora l'omomorfismo $\eta|_{E_1}$ e si consideri la matrice ad esso associata relativamente alla base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ di E_1. Vi verifica facilmente (esercizio) che essa è uguale al blocco della matrice A formato dalle prime due righe e due colonne

di A.
In modo analogo (esercizio) si osserva che la matrice associata all'omomorfismo $\eta|_{E_2}$ relativamente alla base $\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ di E_2 è uguale al blocco della matrice A formato dalle ultime due righe e due colonne di A. $\triangle$

Teorema 15.8 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K. Sia*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Sia dato poi un endomorfismo

$$\eta : E \longrightarrow E$$

tale che

$$\eta(E_i) \subset E_i \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

Sia data fissata una base di E tale che i primi n_1 vettori siano una base di E_1 i successivi n_2 vettori siano una base di E_2 ecc. Si ha allora che:
1) la matrice A associata a η relativamente alla base scelta è una matrice a p blocchi:

$$A = bl(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_p)$$

2) Il blocco B_i è la matrice associata a $\eta|_{B_i}$.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ∎

Si ha anche il viceversa:

Teorema 15.9 *Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K. Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η è una matrice a p blocchi, allora si ha:*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

con E_i opportuni sottospazi vettoriali di E invarianti per η

Dimostrazione Esercizio. ∎

Teorema 15.10 *Sia A una matrice a blocchi:*

$$A = bl(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_j, \ldots B_p)$$

e sia A' la matrice ottenuta da A scambiando tra loro i blocchi B_i e B_j. Cioè:

$$A' = bl(B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_i, \ldots B_p)$$

Allora $A \sim A'$.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. In caso di necessità ispirarsi al seguente esempio. ∎

Esempio 15.11 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di E.
Si verifica facilmente che la matrice associata a η relativamente alla base $\{e_3, e_4, e_1, e_2\}$ è la matrice A'.
Si ha pertanto:

$$A' = M^{-1}AM \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.15.1 Si ha:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

15.4 Esercizi

Esercizio E.15.1 Verificare che le seguenti due matrici sono simili e determinare la matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

15.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.15.1 Ambedue le matrici sono formate da tre blocchi di ordine 1. Nella matrice B abbiamo gli stessi blocchi della matrice A ma in ordine inverso.
Si verifica pertanto facilmente (esercizio) che si ha

$$B = M^{-1}AM \ \text{ con } \ M = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$