Capitolo 5

Sottospazi vettoriali

5.1 Introduzione

Riprendiamo un argomento già studiato ampiamente nel corso di Geometria, i sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale.
Ci limiteremo a darne la definizione, a darne qualche esempio e a ricordare alcuni teoremi. Per maggiori dettagli e per ulteriori esercizi si rimanda al testo di geometria.

5.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 5.1 Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V si dice **sottospazio vettoriale** di V (o, più brevemente, sottospazio) se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} &\in E \text{ per ogni } \mathbf{u} \in E,\, \mathbf{v} \in E \\ k\mathbf{u} &\in E \text{ per ogni } k \in \mathbb{R},\, \mathbf{u} \in E. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Se E è un sottospazio vettoriale di V, allora le operazioni di V inducono in E un'operazione di addizione di vettori e un'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.
Ci chiediamo se E, rispetto a queste operazioni, sia uno spazio vettoriale.
Per verificare ciò dobbiamo verificare se sono valide tutte le proprietà di uno spazio vettoriale. La proprietà 1. (proporietà associativa) è verificata. Infatti, se abbiamo tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di E è chiaro che si ha $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ perché ciò è vero in tutto V. Lo stesso ragionamento può applicarsi per tutte le altre proprietà escluse due proprietà che richiedono po' di attenzione: l'esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione e l'esistenza dell'opposto. Sappiamo infatti che in V esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$: a maggior ragione si avrà $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in E$. Non sappiamo però a priori se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene esso stesso ad E. Allo stesso modo, dato un vettore $\mathbf{u} \in E$, dal momento che questo vettore è un vettore di V, esiste in V il vettore opposto di $\mathbf{u}$, ma non sappiamo a priori se $-\mathbf{u}$ appartiene ad E. In realtà queste due proprietà (esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto) sono automaticamente soddisfatte in un sottospazio vettoriale, come risulta dal seguente:

Teorema 5.2 *Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V allora $\mathbf{0} \in E$ e, per ogni vettore $\mathbf{u}$ di E, il vettore $-\mathbf{u}$ appartiene ad E. Dunque E è esso stesso uno spazio vettoriale (e ciò giustifica il nome di sottospazio).*

DIMOSTRAZIONE Vogliamo mostrare che $\mathbf{0} \in E$. Sappiamo che se k è un numero reale e se $\mathbf{v}$ è un vettore di E si ha che $k\mathbf{v}$ appartiene ad E. In particolare ciò è vero se prendiamo come scalare k il numero 0 e come vettore $\mathbf{v}$ un qualsiasi vettore di E (che è non vuoto, per definizione di sottospazio vettoriale). Dunque $0\mathbf{v} \in E$, ma $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{0} \in E$.

Vogliamo ora mostrare che se $\mathbf{u}$ è un vettore di E allora $-\mathbf{u}$ appartiene anch'esso ad E. Come prima, sappiamo che $k\mathbf{u}$ appartiene ad E qualunque sia k: in particolare $(-1)\,\mathbf{u}$ appartiene ad E. Poiché $(-1)\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ abbiamo il nostro risultato. ■

Nella dimostrazione di questo teorema abbiamo mostrato che l'elemento neutro della addizione di E è necessariamente lo stesso elemento neutro della addizione di V. Abbiamo dunque la seguente osservazione, banale, ma molto utile:

Osservazione 5.3 Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore $\mathbf{0}$ allora E non è un sottospazio vettoriale di V. △

Notiamo che in generale, dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V per mostrare che E è uno spazio vettoriale dobbiamo innanzitutto mostrare che E non è vuoto: invece di far ciò possiamo semplicemente verificare se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene ad E. Se infatti $\mathbf{0}$ appartiene ad E, allora E è sicuramente non vuoto, e possiamo quindi passare a verificare le altre proprietà. Se, invece, $\mathbf{0}$ non appartiene ad E, non è detto che E sia vuoto (E potrebbe contenere dei vettori diversi dal vettore nullo): sicuramente, però possiamo affermare che E non è un sottospazio vettoriale.

Esempio 5.4 Dato un qualsiasi spazio vettoriale V il sottoinsieme $\{\mathbf{0}\}$ di V formato dal solo vettore nullo è ovviamente un sottospazio vettoriale di V. Lo spazio vettoriale V è inoltre un sottospazio vettoriale di se stesso. Questi due sottospazi vettoriali di V sono detti **sottospazi banali**. △

Esempio 5.5 Sottospazi vettoriali di $V^2(\pi, O)$.
L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo.
Sia ora V un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Sia $\mathbf{v} = \vec{OP}$ una sua base. Quindi $\mathbf{v}$ è un vettore non nullo. Il sottospazio V è dato dai vettori $k\mathbf{v}$ al variare di k in R. Esso è quindi dato dai vettori appartenenti alla retta passante per O e per P. Viceversa, l'insieme di tutti i vettori appartenenti ad una retta passante per O è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 2 è lo spazio $V^2(\pi, O)$. △

Esempio 5.6 Sottospazi vettoriali di $V^3(O)$.
I sottospazi di dimensione 0 e 1 sono, rispettivamente, il vettore nullo e le rette passanti per O. Si lascia come esercizio la dimostrazione che i sottospazi di dimensione 2 sono i piani passanti per O. △

Esercizio di base EB.5.1 Dato un campo K, sia $D_K(n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici diagonali. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione. △

Esercizio di base EB.5.2 Dato un campo K, sia $T^K(n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici triangolari superiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione. △

Esercizio di base EB.5.3 Dato un campo K, sia $S(K, n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici simmetriche. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione. △

Teorema 5.7 *Sia dato un sistema omogeneo SO di p equazioni in q incognite a coefficienti in un campo K. Si ha cioè:*

$$SO \ : \quad AX = 0$$

dove $A \in M(K, p, q)$ è la matrice dei coefficienti del sistema e X è la matrice a q righe e 1 colonna delle incognite. L'insieme $Sol(SO)$ delle soluzioni di SO è un sottospazio vettoriale di K^q avente dimensione uguale a $q - \mathrm{rk}(A)$.

Dimostrazione

- Notiamo innanzitutto che $Sol(SO) \neq \emptyset$, infatti $K^q \ni 0 \in Sol(SO)$.
- Dimostriamo ora la chiusura rispetto all'addizione. Siano Y e Y' due soluzioni di SO. Dobbiamo dimostrare che $Y + Y'$ è una soluzione del sistema. Poiché Y e Y' sono soluzioni, abbiamo $AY = AY' = 0$. Dobbiamo dimostrare che si ha $A(Y + Y') = 0$.
  Abbiamo $A(Y + Y') = AY + AY' = 0 + 0 = 0$.
- In modo analogo si dimostra la chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Lasciamo ciò per esercizio.

Abbiamo dimostrato che $Sol(SO)$ è un sottospazio vettoriale.
Per calcolarne la dimensione, rivedere il teorema di Rouchè-Capelli. studiato nel corso di Geometria. ■

Teorema 5.8 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Dati r vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ di V, abbiamo indicato con $< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r >$ l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari. Allora:*
1) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ di V è un sottospazio vettoriale di V.
2) Se W è un sottospazio vettoriale contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, allora W contiene $< \mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_r >$.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Definizione 5.9 Dalla definizione di $< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r >$ segue che i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ generano $< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r >$.
Per questa ragione $< \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r >$ viene detto **sottospazio vettoriale generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ △

5.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.1 Dimostriamo che $D_K(n)$ è un sottospazio vettoriale.

- La matrice nulla è ovviamente una matrice diagonale.

- La somma di due matrici diagonali è diagonale (dimostrarlo).
- La moltiplicazione di una matrice diagonale per uno scalare è una matrice diagonale.

Una base di $D_K(n)$ è data dalle matrici $A(i,i)$ (sono le matrici avente tutti gli elementi nulli fuorchè un elemento della diagonale principale che è uguale a 1).
Ne segue che la dimensione di $D_K(n)$ è uguale a n.

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.2 L'insieme $T^K(n)$ delle matrici triangolari superiori è dato dalle matrici $A = (a_{ij})$ tali che, se $i < j$, allora $a_{ij} = 0$.
Sfruttiamo questa osservazione per dimostrare che $T^K(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(K,n,n)$.

- La matrice nulla O appartiene ovviamente a $T^K(n)$.
- Dimostriamo ora la chiusura di $T^K(n)$ rispetto alla addizione. Sia $A \in T^K(n)$ e $B \in T^K(n)$.
  Posto quindi $A = (a_{ij})$ e $B = (B_{ij})$, per ogni $i < j$ si ha $a_{ij} = b_{ij} = 0$. Dobbiamo dimostrare che, posto, $A + B = C = (c_{ij})$, per ogni $i < j$ si ha $c_{ij} = 0$.
  Ciò deriva dal fatto che, per ogni i e j si ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- In modo analogo si dimostra la chiusura di $T^K(n)$ rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Per calcolare la dimensione di $T^K(n)$, cerchiamone una base.
Si verifica facilmente (farlo) che le matrici $A(i,j)$ con $i \leq j$ formano una base di $T^K(n)$.
Dobbiamo quindi contare il numero di tali matrici.
Osserviamo che ne esistono n del tipo $A(1,j)$. Sono le matrici

$$A(1,1), A(1,2), \cdots, A(1,n)$$

Le matrici del tipo $A(2,j)$ sono $n-1$. Sono le matrici

$$A(2,2), A(2,3), \cdots, A(2,n)$$

E così via fino all' unica matrice di tipo $A(n,j)$,la matrice $A(n,n)$.
Pertanto la dimensione di $T^K(n)$ è uguale a $S = 1 + 2 + \dots n$.
Per calcolare S osserviamo la seguente tabella:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

Sommiamo tutti i numeri che compaiono in questa tabella.
La somma degli elementi di ognuna delle due righe è uguale a S.
La somma delle elementi di ognuna delle n colonne è evidentemente uguale a $n+1$.
Abbiamo pertanto $2S = n(n+1)$. Segue che si ha

$$\dim T^K(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.3 Osserviamo che $A = (a_{ij})$ è una matrice simmetrica se e solo se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i e j.
La dimostrazione che $S(K,n)$ è un sottospazio vettoriale è analoga a quella svolta per $T^K(n)$.
Una base di $S(K,n)$ è data dalle matrici $A(i,i)$ per $i = 1, \dots, n$ e $B(i,j)$ per $i < j$, dove $B(i,j) = A(i,j) + A(j,i)$. Dimostrare ciò. Pertanto

$$\dim S(K,n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

5.4 Esercizi

Esercizio E.5.1 Dato un campo K, sia $T_K(n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici triangolari inferiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione.

Esercizio E.5.2 Siano $x_1, \ldots, x_n$ numeri reali distinti e sia $m \geq n$. Sia:

$$V = \{p(x) \in R^m[x] \mid p(x_1) = \cdots = p(x_n) = 0\}.$$

Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $R^m[x]$ di dimensione uguale a $m - n$.

5.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.5.1 La dimostrazione che $T_K(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ è analoga a quella vista per $T^K(n)$.
In modo analogo al caso di $T^K(n)$ si dimostra che si ha:

$$\dim T_K(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio E.5.2 SUGGERIMENTO. Scegliere $m - n$ numeri reali $x_{n+1}, \ldots, x_m$ distinti tra loro e distinti da $x_1, \ldots, x_n$ e utilizzare la base di Lagrange relativa ai valori $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m$.

Capitolo 6

Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

6.1 Introduzione

Ricordiamo le definizioni di intersezione e somma di due sottospazi vettoriali. Anche in questo caso rimandiamo al testo di geometria per maggiori dettagli e per più esercizi. Daremo la dimostrazione della formula di Grassman che lega le dimensioni dei sottospazi intersezione e somma.

6.2 Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

Teorema 6.1 *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Allora $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale di E.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ∎

Teorema 6.2 *Dato uno spazio vettoriale E su un campo K, siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Sia:*

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

Allora:
1) $V + W$ è un sottospazio vettoriale di E. Esso viene detto **sottospazio somma** *di V e W.*
2) $V \subseteq V + W \quad , \quad W \subseteq V + W$
3) Se U è un sottospazio vettoriale di E tale che $V \subseteq U \quad e \quad W \subseteq U$, allora si ha $V + W \subseteq U$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ∎

Esempio 6.3 Si consideri lo spazio vettoriale $R^5[x]$ dei polinomi di grado minore di 5. Sia V il suo sottospazio vettoriale avente come base:

$$\{p_1(x) = 1 + x + x^2 + 3x^4 \ , \ p_2(x) = 1 + x + 2x^4\}$$

Sia W il sottospazio avente come base:

$$\{p_3(x) = 2 + 2x^4 \ , \ p_4(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^4\}$$

Vogliamo determinare una base per $V + W$ e una base di $V \cap W$.
Cerchiamo innanzitutto una base per $V+W$. Dimostriamo innanzitutto che $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ è un insieme di generatori di $V+W$. Sia infatti $p(x) \in V+W$, allora $p(x) = q(x)+r(x)$ con $q(x) \in V$ e $r(x) \in W$. Ma $q(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$ e $r(x) = b_3p_3(x) + b_4p_4(x)$. Da cui segue immediatamente che $p(x)$ è combinazione lineare dei quattro vettori. Tali vettori sono quindi generatori di $V + W$. Per estrarre da essi una base dobbiamo estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Per fare ciò sfruttiamo il teorema 4.5 . Consideriamo una base di $R^5[x]$, per esempio la base canonica, e consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei quattro vettori. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che A ha rango uguale a 3. Si ha quindi:

$$\dim(V + W) = \mathrm{rk}(A)$$

Il minore formato dalle prime tre righe e prime tre colonne è invertibile. I primi tre vettori formano quindi una base di $V + W$.
Vogliamo ora determinare una base di $V \cap W$. A tale scopo cerchiamo i vettori $p(x) \in V \cap W$. Si ha:

$$p(x) \in V \Longrightarrow p(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$$

$$p(x) \in W \Longrightarrow p(x) = b_3p_3(x) + b_4p_4(x)$$

Da cui, avendo posto $a_3 = -b_3$ e $a_4 = -b_4$, si ottiene:

$$a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) + a_4p_4(x) = 0$$

Abbiamo quindi un'equazione vettoriale nelle incognite $a_1, \ldots, a_4$. Se si passa dall'equazione vettoriale alle equazioni con le coordinate dei vettori relative alla base canonica, si ottiene un sistema omogeneo di 5 equazioni in 4 incognite. La matrice dei coefficienti non è altro che la matrice A. L'insieme delle soluzioni ha quindi dimensione uguale a $4 - \mathrm{rk}(A) = 1$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a_1 = t \ , \ a_2 = t \ , \ a_3 = -\frac{1}{2}t \ , \ a_4 = -t$$

e i vettori di $V \cap W$ sono del tipo:

$$p(x) = tp_1(x) + tp_2(x) = t(2 + 2x + x^2 + 5x^4)$$

ed una sua base è data dal vettore $2 + 2x + x^2 + 5x^4$. Notiamo che si ha:

$$\dim(V \cap W) = 4 - \mathrm{rango}(A).$$

Nota 6.4 Nell'esempio precedente abbiamo trovato una base di $V+W$ cercando un minore di ordine 3 invertibile.
Osserviamo che di minori siffatti non ve ne è più di uno. Per esempio, anche il minore formato dalle prime tre righe e dalle ultime tre colonne è invertibile. Un'altra base di $V+W$ è data quindi dagli ultimi tre vettori. △

Teorema 6.5 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K. Siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Si ha la* **formula di Grassman**[1]

$$\dim V + \dim W = \dim(V+W) + \dim(V \cap W).$$

Dimostrazione La dimostrazione ricalca il procedimento utilizzato nell'esempio 6.3. Ne diamo quindi rapidi cenni, lasciando i particolari come esercizio.
Si fissa una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ dello spazio E. Si fissa una base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ di V e una base $\{\mathbf{w}_{p+1}, \ldots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ di W. Si considera la matrice A avente come colonne le coordinate, relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di V, dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \ldots, \mathbf{w}_{p+q}\}$. Si ha $\dim(V+W) = \text{rango}(A)$. Si determina ora una base di $V \cap W$ con il procedimento utilizzato nell'esempio 6.3. Si ha un sistema omogeneo di n equazioni in $p+q$ incognite in cui A è la matrice dei coefficienti. La dimensione di $(V \cap W)$ è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema. Essa è uguale a $p+q-\text{rango}(A)$. Da cui segue facilmente la tesi. ■

Esercizio di base EB.6.1 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ su $\mathbb{C}$:

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 = 0$$

Determinare basi per $V+W$ e per $V \cap W$. △

Nota 6.6 Dalla definizione di $V+W$ segue che ogni vettore di V+W si scrive come $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$. Tale scrittura può NON essere unica. Si consideri infatti l'esempio 6.3. Dato infatti il vettore $q(x) = x + x^4$, si ha $q(x) = -p_1(x) + p_4(x)$. Considerato poi un qualsiasi vettore $p(x) \in V \cap W$, si ha:

$$q(x) = (-p_1(x) + p(x)) + (-p(x) + p_4(x))$$

Notiamo che si ha $-p_1(x) + p(x) \in V$ e $-p(x) + p_4(x) \in W$.
Prendendo quindi, per esempio, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, otteniamo una seconda scrittura di $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= [-p_1(x) + p(x)] + [-p(x) + p_4(x)] = \\ &= [-p_1(x) + p_1(x) + p_2(x)] + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] = \\ &= p_2(x) + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] \end{aligned}$$

[1]**Hermann Günther Grassman,** (1809,1877), matematico e indianista tedesco.

6.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.6.1 Si determina innanzitutto una base per V e una base per W.
Si verifica facilmente che

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)\}$$

è una base di V.
Si verifica facilmente che

$$\{\mathbf{v}_3 = (1, i, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 1)\}$$

è una base di W. Sia A la matrice avente come colonne le coordinate, relative alla base canonica di $\mathbb{C}^3$, dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Si ha $\mathrm{rk}(A) = 3$ e quindi $\dim(V + W) = 3$. Pertanto $V + W = \mathbb{C}^3$ e quindi una base di $V + W$ è la base canonica di $\mathbb{C}^3$.
Dalla formula di Grassman segue $\dim(V \cap W) = 1$.
Per determinarne una base potremmo seguire il procedimento visto in 6.3. Usiamo però un altro metodo. I vettori (z_1, z_2, z_3) appartenenti a $V \cap W$ sono tutti e soli i vettori verificanti il sistema:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 & = & 0 \\ z_1 + iz_2 & = & 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli (farlo!) otteniamo le soluzioni del sistema

$$\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)t, \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)t, t\right) \mid t \in \mathbb{C}$$

Otteniamo una base di $V \cap W$ ponendo $t = 1$. Pertanto

$$\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 1\right)\right\}$$

è una base di $V \cap W$.

6.4 Esercizi

Esercizio E.6.1 In $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ considerare i sottospazi vettoriali $S(\mathbb{R}, 2)$ e $T^{\mathbb{R}}(2)$. Determinare una base di $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2)$ e una base di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Esercizio E.6.2 In $M(\mathbb{R}, n, n)$ considerare i sottospazi vettoriali $S(\mathbb{R}, n)$ e $T^{\mathbb{R}}(n)$. Determinare una base di $S(\mathbb{R}, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ e una base di $S(\mathbb{R}, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$.

Esercizio E.6.3 Sia dato uno spazio vettoriale E di dimensione 3 su un campo K. Siano V e W due suoi sottospazi vettoriali aventi ambedue dimensione uguale a 2. Cosa si può dire per la dimensione di $V + W$ e per la dimensione di $V \cap W$?

Esercizio E.6.4 Dimostrare, sfruttando la formula di Grassman, la seguente proprietà di geometria: se due piani hanno almeno un punto di intersezione, allora o essi coincidono o hanno come intersezione una retta.

Esercizio E.6.5 Dimostrare il seguente teorema. Dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita, se V e W sono due suoi sottospazi vettoriali tali che $\dim(V+W) = \dim(W)$, allora si ha $V \subseteq W$.

6.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.6.1 Per risolvere questo esercizio si potrebbe fissare una base per ognuno dei due sottospazi e poi procedere come nell'esempio 6.3. In questo caso però vi una strada più veloce. Sappiamo infatti che si ha $\dim S(\mathbb{R},2) = 3$ e che esistono matrici triangolari superiori che non sono simmetriche. Ma allora $\dim(S(\mathbb{R},2) + T^{\mathbb{R}}(2) > 3$ e quindi $S(\mathbb{R},2) + T^{\mathbb{R}}(2) = 4$. Ne segue che una base di $S(\mathbb{R},2) + T^{\mathbb{R}}(2)$ è la base canonica di $M(\mathbb{R},2,2)$.
Dalla formula di Grassman segue $\dim(S(\mathbb{R},2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)) = 2$. Per determinare una base dell'intersezione dobbiamo quindi determinare due vettori linearmente indipendenti di $S(\mathbb{R},2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.
Osserviamo che le matrici

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;,\; A(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono entrambe simmetriche e triangolari superiori. Essendo linearmente indipendenti formano una base di $S(\mathbb{R},2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Soluzione dell'esercizio E.6.2 Consideriamo innanzitutto $S(\mathbb{R},n,n) + T^{\mathbb{R}}(n)$.
In EB.5.3 abbiamo visto che una base di $S(\mathbb{R},n,n)$ è data dalla matrici $A(i,i)$, con $i = 1,\dots,n$ e $B(i,j) = A(i,j) + A(j,i)$ con $i < j$.
In EB.5.2 abbiamo visto che una base di $T^{\mathbb{R}}(n)$ è data dalla matrici $A(i,j)$ con $i \leq j$.
L'insieme di tutte le matrici appartenenti a queste due basi è un insieme di generatori di $S(\mathbb{R},n,n)$ è data dalla matrici $A(i,i)$.
Si verifica facilmente (farlo) che tutte le matrici $A(i,j)$ della base canonica di $M(\mathbb{R},n,n)$ si ottengono come combinazioni lineari delle matrici delle due basi. Ne segue che $S(\mathbb{R},n,n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ coincide con $M(\mathbb{R},n,n)$. Una sua base è quindi data dalla base canonica di $M(\mathbb{R},n,n)$.
Consideriamo ora $S(\mathbb{R},n,n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$.
Osserviamo che, se $A = (a_{ij}) \in S(\mathbb{R},n,n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$ allora, per ogni $i > j$ si ha $a_{ij} = 0$ (perché $A \in T^{\mathbb{R}}(n)$).
Ma allora, poiché $A \in S(\mathbb{R},n,n)$, si ha $a_{ij} = a_{ji}$ e quindi $a_{ji} = 0$ per $i > j$. Cambiando il nome degli indici, si ha quindi $a_{ij} = 0$ per $i < j$.
Pertanto, per ogni $i \neq j$ si ha $a_{ij} = 0$. Quindi $S(\mathbb{R},n,n) \cap T^{\mathbb{R}}(n) = D(\mathbb{R},n)$.
Per chi si fosse perso in questa sarabanda di indici, esprimiamo a parole ciò che abbiamo appena detto.
Ogni matrice dell'intersezione, poiché appartiene a $T^{\mathbb{R}}(n)$ ha tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale uguali a 0. D'altronde anche gli elementi che si trovano sopra la diagonale principale, essendo uguali a elementi che si trovano sotto la diagonale principale, sono uguali a 0. Ne segue che tutti gli elementi che non si trovano sulla diagonale principale sono uguali a 0.

Per inciso, notiamo che, applicando la formula di Grassman, si può seguire una diversa strada per risolvere l'esercizio.
Infatti, una volta che si è visto che si ha:

$$S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n) = D(\mathbb{R}, n)$$

si può determinare la dimensione di $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ con la formula di Grassman:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = \dim S(\mathbb{R}, n, n) + \dim T^{\mathbb{R}}(n) - \dim S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$$

e quindi

$$\dim(S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

Pertanto

$$S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = M(\mathbb{R}, n, n)$$

Soluzione dell'esercizio E.6.3 Osserviamo, che poiché si ha $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim E = 3$ si ha $\dim(V + W) = 3$ oppure $\dim(V + W) = 2$.
Se $\dim(V + W) = 3$, allora $V + W = E$ e $\dim(V \cap W) = 1$. Se $\dim(V + W) = 2$, allora $V + W = V$ e $V + W = W$. Da ciò segue $V = W$ e quindi $V \cap W = V = W$.

Soluzione dell'esercizio E.6.4 Indicato con O un punto di intersezione dei due piani, consideriamo lo spazio vettoriale $V^3(O)$. I due piani sono allora sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $V^3(O)$. Il sottospazio somma ha dimensione uguale a 2 o a 3. Dal calcolo della dimensione del sottospazio intersezione segue allora la tesi.

Soluzione dell'esercizio E.6.5 Sappiamo che, dati comunque V e W, si ha sempre $V \subseteq V + W$ e $W \subseteq V + W$.
Nel nostro caso da $\dim W = \dim(V + W)$ segue allora $W = V + W$. E quindi $V \subseteq W$.

Capitolo 7

Somma diretta di sottospazi vettoriali

7.1 Introduzione

Introduciamo un caso particolare di somma di due sottospazi vettoriali: la somma diretta. Anche questo argomento è stato visto nel corso di geometria. Rimandiamo quindi al testo di geometria per ulteriori esempi di somme dirette di due sottospazi vettoriali.
Generalizziamo infine la defizione di somma diretta al caso di un numero finito di sottospazi vettoriali.

7.2 Somma diretta

Definizione 7.1 Sia dato uno spazio vettoriale E. Siano U, V e W suoi sottospazi vettoriali. Il sottospazio vettoriale U si dice **somma diretta** di V e W se si ha:

$$V \cap W = \{\mathbf{0}\} \quad , \quad V + W = U$$

Se U è somma diretta di V e W, si usa il simbolo:

$$U = V \oplus W$$

Teorema 7.2 *Sia dato uno spazio vettoriale E. Siano U, V e W suoi sottospazi vettoriali. Si ha che $U = V \oplus W$ se e solo se ogni vettore* $\mathbf{u}$ *di U si può scrivere* **in modo unico** *come* $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ *con* $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$.

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo innanzitutto che, se $U = V \oplus W$, allora ogni vettore di U si scrive in uno ed in solo modo.
Osserviamo innanzitutto che, poiché $U = V + W$, ogni vettore si scrive in almeno un modo come somma di un vettore di V e di un vettore di W.
Dimostriamo che tale scrittura è unica.

Sia $u = v + w = v' + w'$ con $u \in U$, $v \in V, v' \in V, w \in W, w' \in W$.
Ma allora si ha:

$$v - v' = w' - w$$

Poiché V è un sottospazio vettoriale $v - v' \in V$. Poiché W è un sottospazio vettoriale $x' - w \in V$.
Segue quindi $v - v' = w' - w \in V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Da cui $v = v'$ e$w = w'$.
Dobbiamo ora dimostrare che, se la scrittura è unica, allora $U = V \oplus W$.
Il fatto che ogni vettore di U si scriva come somma di un vettore di V e di un vettore di W implica $U = V + W$.
Dobbiamo dimostrare che si ha $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Ispirandosi a 6.6 si dimostra (farlo) che, se l'intersezione non fosse formata dal solo vettore nullo, la scrittura non sarebbe unica. ■

Teorema 7.3 *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ una base di V e $\{\mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ una base di W. Allora $V + W = V \oplus W$ se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ è una base di $V + W$.*

Dimostrazione Utilizzare la formula di Grassman. ■

Teorema 7.4 *Si ha:*

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

Dimostrazione Ovvia.

Definizione 7.5 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $E = V \oplus W$. Allora i sottospazi V e W si dicono **supplementari** in E. △

Esempio 7.6 Dato $V^2(\pi, O)$ e due suoi sottospazi r e s di dimensione 1 intersecantisi nel solo punto O (quindi r e s sono due rette passanti per O non coincidenti) si ha $V^2(\pi, O) = r \oplus s$. △

Esempio 7.7 Dato $V^3(O)$, sia r una retta passante per O e π un piano passante per O non contenente la retta r. Si ha: $V^3(O) = r \oplus \pi$. △

Esercizio di base EB.7.1 Si consideri lo spazio vettoriale dei complessi $\mathbb{C}$ sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. L'insieme $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$. L'insieme $\mathfrak{I}$ dei numeri complessi aventi parte reale nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ (esercizio). Verificare che si ha $C = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{I}$. △

Ci chiediamo se, dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita ed un suo sottospazio vettoriale V, esista un supplementare W di V in E.
Studiamo innanzitutto i casi ovvi. Se $V = E$, allora il supplementare di V è il sottospazio nullo.
Viceversa, il supplementare dello spazio nullo è lo spazio E.

Ma cosa si può dire se V è un sottospazio proprio di E? Vediamo qualche esempio.

Esempio 7.8 Dato $V^2(\pi, O)$, un supplementare di una retta r passante per O è una qualsiasi retta s passante per O non coincidente con r. Notiamo che di tali rette ne esiste più di una. $\triangle$

Esempio 7.9 Consideriamo ora $V^3(O)$ e una retta r passante per O. Un supplementare di r è un qualsiasi piano π passante per O non contenente la retta r. Anche in questo caso vi sono molti supplementari. $\triangle$

Noi vogliamo dimostrare che ogni sottospazio vettoriale è dotato di supplementare. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente teorema.

Teorema 7.10 (del completamento della base) *Sia dato uno spazio vettoriale E con base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.*
Dati comunque p vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ linearmente indipendenti di E (e quindi $p \leq n$), si possono scegliere $n - p$ vettori tra i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tali che, aggiunti ai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$, essi formino ua base di E.

Dimostrazione Consideriamo la matrice A di ordine $p+n, n$ avente le prime p colonne formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ relative alla base scelta in E e le altre n colonne n formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ relative alla base scelta in E.
Osserviamo che la il minore di A formato da tutte le n righe di A e dalle ultime n colonne è la matrice identica I. Quindi $\operatorname{rk} A = n$.
D'altronde, poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti, esiste un minore invertibile B di ordine p della matrice A in cui intervengano solo le prime p colonne di A. Dal teorema dell'orlare studiato al primo anno segue che, poiché $\operatorname{rk} A = n$ è possibile aggiungere al minore B le ulteriori $n - p$ righe e $n - p$ colonne scelte tra le ultime n colonne di A in modo tale da ottenere un minore C di A che sia invertibile.
Le n colonne della matrice C sono linearmente indipendenti. Sono quindi linearmente indipendenti gli n vettori corrispondenti alle colonne di C. Questi vettori formano la base cercata. $\blacksquare$

Teorema 7.11 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia V un suo sottospazio vettoriale. Allora esiste almeno un supplementare di V in E.*

Dimostrazione Lasciata per esercizio. Suggerimento: prendere esempio dalla dimostrazione del teorema di completamento di una base. $\blacksquare$

Esempio 7.12 Dato lo spazio vettoriale $R^3[x]$, sia V il suo sottospazio avente come base $\{p(x) = 1 + x + x^2\}$. Vogliamo determinare un supplementare di V. Per fare ciò consideriamo la base canonica di $R^3[x]$ e consideriamo la matrice A avente come prima colonna le cooordinate del vettore $p(x)$ e come seconda, terza e quarta colonna le coordinate dei tre vettori della base canonica di $R^3[x]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il minore formato dalle prime tre colonne è invertibile.
Quindi $\{1 + x + x^2, 1, x\}$ è una base di $R^3[x]$.
Il sottospazio avente come base $\{1, x\}$ è supplementare di V. $\triangle$

Nota 7.13 Osserviamo che, nell'esempio, precedente non vi è un solo supplementare di V.
Per esempio, si può vedere che anche il sottospazio avente come base $\{x, x^2\}$ è supplementare di V. △

Definizione 7.14 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano $V_1, \ldots, V_p$ sottospazi vettoriali di E. Si dice che un sottospazio U è **somma diretta** di $V_1, \ldots, V_p$, in simboli:

$$U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$$

se, dato comunque un vettore $\mathbf{u} \in U$, esiste una sola p-upla di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ con $\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V_p$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_p$. △

Nota 7.15 Il teorema 7.2 ci assicura che, nel caso di $p = 2$, quest'ultima definizione di somma diretta coincide con la definizione data in precedenza. △

Esempio 7.16 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$.
Si dimostra facilmente (farlo) che i seguenti tre sottoinsiemi:

$$V_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}\ ,\ V_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}\ ,\ V_3 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Si verifica (farlo) che si ha $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. △

Teorema 7.17 (generalizzazione del teorema 7.3) *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano $V_1, \ldots V_p$ suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia:*
$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}\}$ una base di V_1.
Sia $\{\mathbf{e}_{q_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_2}\}$ una base di V_2
... e sia infine $\{\mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_p}\}$ una base di V_p.
Allora:
$U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ se e solo se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_p}\}$ è una base di U.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.7.2 Dato lo spazio vettoriale $V^3(O)$ siano r_1, r_2, r_3 tre rette passanti per O non complanari. Si ha $V^3(O) = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$. △

7.3 Soluzione degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.1 Usiamo il teorema 7.3.
Il vettore $\mathbf{v}_1 = 1$ è una base di $\mathbb{R}$.
$\mathbf{v}_2 = i$ è una base di $\Im$.
Sappiamo che $\{1, i\}$ é una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. Pertanto da 7.3 segue $C = \mathbb{R} \oplus \Im$.

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.2 Per dimostrare ciò usiamo il teorema 7.17.
Sia $P_1 \neq 0$ un punto di r_1. Quindi $\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}\}$ è una base di r_1. Analogamente, dati $P_2 \in r_2$ e $P_3 \in r_3$ distinti da O, si ha che $\{\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}\}$ e $\{\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP_3}\}$ sono basi di r_2 e r_3 rispettivamente.
I punti O, P_1, P_2, P_3 non sono complanari e quindi:

$$\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}, \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}, \mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP_3}\}$$

è una base di $V^3(O)$. Ne segue $V^3(O) = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$.

7.4 Esercizi

Esercizio E.7.1 Sia $S(\mathbb{R}, n)$ il sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ dato dalle matrici simmetriche. Quindi:

$$S(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n, n) | A = {}^tA\}$$

Indichiamo con $AS(\mathbb{R}, n)$ l'insieme delle matrici antisimmetriche. Quindi:

$$AS(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n, n) | A = -{}^tA\}$$

Dimostrare che $AS(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ e che si ha:

$$M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) \oplus AS(\mathbb{R}, n)$$

SUGGERIMENTO. Notare che, per ogni matrice $A \in M(R, n, n)$, si ha

$$A +{}^t A \in S(R, n)\ ,\ A -{}^t A \in AS(R, n)$$

e che

$$2A = A +{}^t A + A -{}^t A$$

Esercizio E.7.2 Determinare quali condizioni bisogna assegnare ad un campo K perché si abbia:

$$M(K, n, n) = S(K, n) \oplus AS(K, n)$$

Esercizio E.7.3 Fissato il campo $\mathbb{Z}_2$, si considerino i sottospazi vettoriali di $M(\mathbb{Z}_2, n, n)$ dati da $S(\mathbb{Z}_2, n)$ e $AS(\mathbb{Z}_2, n)$. Determinare $S(\mathbb{Z}_2, n)+AS(\mathbb{Z}_2, n)$ e $S(\mathbb{Z}_2, n)\cap AS(\mathbb{Z}_2, n)$.

Esercizio E.7.4 Considerare lo spazio vettoriale $R^4[x]$. Sia V il suo sottospazio vettoriale dato da:

$$V = \{p(x) \in R^4[x] \mid p(1) = p(5) = 0\}$$

Determinare un supplementare di V.

Esercizio E.7.5 Determinare tre sottospazi vettoriali non nulli V_1, V_2, V_3 di R^5 tali che si abbia $R^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

7.5 Soluzione degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.7.1 La dimostrazione che $AS(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ è analoga alla dimostrazione che $(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$, pertanto la omettiamo. In ogni caso consigliamo di farla.
Si dimostra (farlo) che le matrici $C(i, j) = A(i, j) - A(j, i)$ con $i < j$ formano una base di $AS(\mathbb{R}, n)$. Quindi

$$\dim AS(\mathbb{R}, n) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Dobbiamo ora dimostrare che si ha:

$$M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) \oplus AS(\mathbb{R}, n)$$

Osserviamo che per ogni matrice $A \in M(\mathbb{R}, n, n$ si ha:

$$A = \frac{1}{2}(A +{}^t A) + \frac{1}{2}(A -{}^t A$$

con $\frac{1}{2}(A+^tA) \in S(\mathbb{R},n)$ e $\frac{1}{2}(A-^tA \in AS(\mathbb{R},n)$.
Pertanto $M(\mathbb{R},n,n) = S(\mathbb{R},n) + AS(\mathbb{R},n)$.
Dobbiamo ora verificare che si ha $S(\mathbb{R},n) \cap AS(\mathbb{R},n) = \{\mathbf{O}\}$.
Si dimostra ciò usando la formula di Grassman:

$$\dim(S(\mathbb{R},n) \cap AS(\mathbb{R},n)) = \dim S(\mathbb{R},n) + \dim AS(\mathbb{R},n)) - \dim(S(\mathbb{R},n) + AS(\mathbb{R},n))$$

quindi:

$$\dim(S(\mathbb{R},n) \cap AS(\mathbb{R},n)) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} - n^2 = 0$$

Soluzione dell'esercizio E.7.2 Osserviamo che nella dimostrazione precedente abbiamo considerato $\frac{1}{2}$.
Il problema è capire cosa sia, in un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi, l'elemento $\frac{1}{2}$.
Si ha ovviamente $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, dove $2 = 1 + 1$, essendo 1 l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione del campo.
Sappiamo che ogni elemento non nullo di un campo è dotato di inverso.
Qui sta il punto: chi ci dice che 2 sia diverso da 0?
Vi è un altro punto delicato: la dimostrazione che le matrici $C(i,j) = A(i,j) - A(j,i)$ con $i < j$ formino una base di $AS(\mathbb{K},n)$ è valida per ogni campo $\mathbb{K}$?
In effetti se $2 \neq 0$, la dimostrazione rimane valida (perché?). Ma se $2 = 0$ la dimostrazione non è più valida (perché?). Da tutto ciò segue che il teorema rimane vero se nel campo $\mathbb{K}$ si ha $2 \neq 0$.
Ma nel campo $\mathbb{Z}_2$ si ha $2 = 0$.
Nel prossimo esercizio mostriamo che in quest'ultimo caso il teorema non è valido.

Soluzione dell'esercizio E.7.3 In $\mathbb{Z}_2$ si ha $-0 = 0$ e $-1 = 1$, pertanto, per ogni $a \in \mathbb{Z}_2$ si ha $a = -a$.
Segue da ciò $S(\mathbb{Z}_2,n) = AS(\mathbb{Z}_2,n)$.
Pertanto $S(\mathbb{Z}_2,n) + AS(\mathbb{Z}_2,n) = S(\mathbb{Z}_2,n) \cap AS(\mathbb{Z}_2,n) = S(\mathbb{Z}_2,n) = AS(\mathbb{Z}_2,n)$

Soluzione dell'esercizio E.7.4 Si considerino in $\mathbb{R}^4[x]$, due numeri diversi da 1 e 5, per esempio 7 e 9. Si consideri la base di Lagrange $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ relativa a $1, 5, 7, 9$.
Si ha (esercizio) $V =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.
Un supplementare di V è quindi $W =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 >$.

Soluzione dell'esercizio E.7.5 Si possono determinare i tre sottospazi vettoriali non nulli V_1, V_2, V_3 di $\mathbb{R}^5$ tali che si abbia $\mathbb{R}^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ in vari modi.
Fissata una qualsiasi base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ di $\mathbb{R}^5$, si può, per esempio, fissare

$$V_1 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \ , \ V_2 =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 > \ , \ V_3 =< \mathbf{v}_5 >$$

¿