Capitolo 8

Cambio di base

8.1 Introduzione

Sappiamo che, fissata una base finita in uno spazio vettoriale, ad ogni vettore sono associate le coordinate relative a tale base. In questo capitolo vediamo che tali coordinate cambiano quando si cambia la base e mostreremo come.

8.2 Cambio di base

Esempio 8.1 Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ e la sua base canonica
$\{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = x, \mathbf{e}_2 = x^2\}$.
Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3 + 5x + 8x^2$ relative alla base canonica sono $(3, 5, 8)$.
Consideriamo ora i vettori $\{\mathbf{e}'_0 = 1, \mathbf{e}'_1 = 1 + x, \mathbf{e}'_2 = 1 + x + x^2\}$. Osserviamo che essi formano una base. Infatti la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avente come colonne le coordinate di $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ relative alla base canonica è invertibile.
Sappiamo che il vettore $\mathbf{v}$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$:

$$v = b'_0\mathbf{e}'_0 + b'_1\mathbf{e}'_1 + b'_2\mathbf{e}'_2$$

Determiniamo b'_0, b'_1, b'_2.
Abbiamo

$$3 + 5x + 8x^2 = a'_0(1) + b'_1(1 + x) + b'_2(1 + x + x^2) = (a'_0 + a'_1 + a'_2) + (a'_1 + a'_2)x + a'_2x^2$$

e quindi

$$\begin{cases} a'_0 + a'_1 + a'_2 &= 3 \\ a'_1 + a'_2 &= 5 \\ a'_2 &= 8 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} a'_0 &= -2 \\ a'_1 &= -3 \\ a'_2 &= 8 \end{cases}$$

Ne segue che $(-2, -3, 8)$ sono le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ relative alla base $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. Pertanto le coordinate cambiano al variare della base. $\triangle$

Vogliamo determinare come sono legate tra loro tra le coordinate relative a diverse basi di uno stesso vettore.

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha:

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n$$

Scriviamo, utilizzando il prodotto righe per colonne tra matrici, la formula precedente nel seguente modo:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Notare che si è considerato $(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$ come una matrice ad una riga e n colonne i cui elementi sono vettori di V.

Consideriamo ora un'altra base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ di V. Si ha:

$$\mathbf{v} = b'_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + b'_n\mathbf{e}'_n$$

Con il simbolismo compatto:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare la relazione intercorrente tra le coordinate

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e le coordinate

$$B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

relative alla base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$.

Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Si ha cioè, utilizzando il simbolismo matriciale sopra introdotto:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)M$$

Poiché i vettori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ sono linearmente indipendenti, la matrice M è invertibile. Essa viene chiamata **matrice di passaggio** dalla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$. Dalla formula precedente segue:

$$(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n)M^{-1}$$

e quindi la matrice M^{-1} è la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Si ha, sfruttando le formule precedenti:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Quindi

$$M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

sono le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Per l'unicità delle coordinate relative ad una stessa base si ha:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$B = MB'$$

da cui segue anche:

$$B' = M^{-1}B$$

Queste sono le formule che cercavamo.

Teorema 8.2 (Relazione tra le coordinate) *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base.*
Fissato un vettore $\mathbf{v}$ di V, sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ciè

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_n\mathbf{e}_n$$

Consideriamo ora un'altra base $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$ di V. Sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\mathbf{v} = b'_1\mathbf{e}'_1 + \cdots + b'_n\mathbf{e}'_n$$

Sia M la **matrice di passaggio** *dalla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$, cioè la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Quindi:*

$$(\mathbf{e}'_1 \ldots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n)M$$

Allora si ha:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$B = MB'$$

da cui segue anche:

$$B' = M^{-1}B$$

Esercizio di base EB.8.1 Si svolga di nuovo l'esempio 8.1 utilizzando le formule appena trovate. △

8.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.8.1 La matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$

$$\{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = x, \mathbf{e}_2 = x^2\}$$

alla base

$$\{\mathbf{e}'_0 = 1, \mathbf{e}'_1 = 1 + x, \mathbf{e}'_2 = 1 + x + x^2\}$$

è data dalla matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3 + 5x + 8x^2$ relative alla base canonica sono $(3, 5, 8)$. Pertanto le coordinate di $\mathbf{v}$ relative alla nuova base base sono:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

8.4 Esercizi

Esercizio E.8.1 Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta $x = y = 2z$ e il piano $x - 2y + z = 0$. Si fissi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da un vettore appartenente alla retta e da due vettori appartenenti al piano. Determinare le coordinate di $(3, 5, 1)$ relative a questa base.

Esercizio E.8.2 Si consideri in $\mathbb{R}^3[x]$ la base di Lagrange relativa ai punti 1,2,3. Si determinino le coordinate, relative a questa base di Lagrange, del polinomio $1+x+2x^2$.

Esercizio E.8.3 Si consideri in $\mathbb{R}^3[x]$ la base di Lagrange relativa ai punti 1,2,3. Si determinino le coordinate, relative alla base canonica, del polinomio avente $(1, 1, 2)$ come coordinate relative alla base di Lagrange.

Esercizio E.8.4 Si consideri la base $\{1 + i, 3 - i\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}$ sui reali. Determinare le coordinate relative a tale base del numero complesso $2 + 7i$.

8.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.8.1 Una base della retta $x = y = 2z$ è data da $\{\mathbf{v}'_1 = (2, 2, 1)\}$.
Una base del piano $x - 2y + z = 0$ è data da $\{\mathbf{v}'_2 = (-1, 0, 1), \mathbf{v}'_3 = (2,', 0)\}$.
Pertanto le coordinate del vettore $(3, 5, 1)$ relative alla base $\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ sono ...

Soluzione dell'esercizio E.8.2 Per rispondere a questa domanda, volendo, si può determinare esplicitamente la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ alla base di Lagrange e quindi usare la formula di trasformazione delle coordinate. In questo caso però si può evitare tutto ciò ricordando quali proprietà hanno le coordinate di un polinomio relative ad una base di Lagrange.

Soluzione dell'esercizio E.8.3 Determinare la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3 x$ alla base di Lagrange e quindi usare la formula di trasformazione delle coordinate.

Soluzione dell'esercizio E.8.4 Provare a svolgere l'esercizio sia svolgendo direttamente i calcoli così come si è fatto nel primo esempio del capitolo, sia determinando la matrice di passaggio tra le due basi e applicando quindi la formula di passaggio delle coordinate.

Capitolo 9

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Riprendiamo un argomento già ampiamente studiato nel corso di Geometria: gli omomorfismi tra spazi vettoriali.
Ci limiteremo a darne la definizione e a darne qualche esempio e a ricordare alcuni teoremi. Per maggiori dettagli e per ulteriori esercizi si rimanda al testo di Geometria.

9.1 Omomorfismi

Definizione 9.1 Dati due spazi vettoriali V e W su uno stesso campo $\mathbb{K}$, un **omomorfismo** tra V e W è una funzione $\eta : \quad V \longleftarrow W$ tale che:

$$\eta(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}) + \eta(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{w} \in W$$

$$\eta(k\mathbf{v}) = k\eta(\mathbf{v}) \ \ \forall k \in \mathbb{K}, \forall v \in V$$

In altre parole un omomorfismo tra spazi vettoriali è una funzione che conserva l'operazione di addizione tra vettori e l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. △

Esercizio di base EB.9.1 Sia $\eta : M(R,p,q) \longrightarrow M(R,q,p)$ l'applicazione definita da

$$\eta(A) = \ {}^tA \quad \forall A \in M(R,p,q)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali. △

Esercizio di base EB.9.2 Data $B \in M(R,p,q)$. Sia $\eta : M(R,q,r) \longrightarrow M(R,p,r)$ l'applicazione definita da $\eta(X) = BX$ per ogni $X \in M(R,q,r)$. Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali. △

Teorema 9.2 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali. Si ha allora:*
$\eta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
$\eta(-\mathbf{v}) = -\eta(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in E$

Dimostrazione Sfruttare il fatto che si ha:
$\mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$. ■

Teorema 9.3 *Siano* $\alpha : E \longrightarrow F$ *e* $\beta : F \longrightarrow G$ *omomorfismi.*
Allora $\beta \circ \alpha : E \longrightarrow G$ *è un omomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 9.4 *L'immagine di un omomorfismo* $\eta : V \longrightarrow W$ *tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di* W*.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio.

Definizione 9.5 Dato un omomorfismo tra spazi vettoriali $\eta : V \longrightarrow W$, chiamiamo **nucleo** di η (e lo indichiamo con il simbolo $\ker \eta$), il seguente sottoinsieme di V:

$$\ker \eta = \{\mathbf{v} \in V \mid \eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Teorema 9.6 *Il nucleo di un omomorfismo* $\eta : V \longrightarrow W$ *tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di* V*.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio.

Esercizio di base EB.9.3 Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo definito nell'esercizio EB.9.1. △

Teorema 9.7 *Un omomorfismo tra spazi vettoriali è iniettivo se e solo se il suo nucleo è formato dal solo vettore nullo.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 9.8 *Sia* $\eta : V \longrightarrow W$ *un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia* $\mathbf{v} \in V$ *e* $\mathbf{w} \in W$ *tali che* $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$*. Allora:*

$$\eta^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} + \ker \eta$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 9.9 *Sia* $\eta : V \longrightarrow W$ *un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ *una base di* V*. Allora* $\{\eta(\mathbf{v}_1), \ldots, \eta(\mathbf{v}_q)\}$ *è un insieme di generatori di* $\eta(V)$*.*

DIMOSTRAZIONE . $\mathbf{w}$ un vettore dell'immagine di η. Esiste quindi un vettore $\mathbf{v} \in V$, tale che si abbia $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ma $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ è una base di V; quindi, se $\mathbf{v} \in V$, si ha $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_q\mathbf{v}_q$. Ma allora, sfruttando il fatto che η è un omomorfismo, segue:

$$\mathbf{w} = \eta(\mathbf{v}) = a_1\eta(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_q\eta(\mathbf{v}_q)$$

cioè la tesi. ■

Teorema 9.10 *Siano* V *e* W *due spazi vettoriali su un campo* $\mathbb{K}$*. Sia* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ *una base di* V*.*
Assegnati comunque n vettori $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\}$ *in* W*, esiste uno ed un solo omomorfismo* $\eta : V \longrightarrow W$ *tale che:*

$$\eta(\mathbf{v}_1 = \mathbf{w}_1, \ldots, \eta(\mathbf{v}_q = \mathbf{w}_q$$

DIMOSTRAZIONE Sfruttare la formula

$$\eta(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_q\mathbf{v}_q) = a_1\eta(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_q\eta(\mathbf{v}_q)$$

9.2 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.9.1 Ricordare che si ha

$$^t(A+B) = ^t A + ^t B$$

$$^t(kA) = k(^tA)$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.9.2 Ricordare che si ha

$$B(A+A') = BA + BA'$$

$$B(kA) = kBA$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.9.3 Si ha $\ker \eta = \{\mathbf{0}\}$ e $\eta(M(\mathbb{R}, p, q)) = M(\mathbb{R}, q, p)$. Pertanto l'omomorfismo η è surgettivo.

9.3 Esercizi

Esercizio E.9.1 Sia $\phi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$ l'applicazione definita da

$$\phi(A) = A + ^t A \quad \forall A \in M(R, n, n)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Esercizio E.9.2 Sia $\psi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$ l'applicazione definita da

$$\psi(A) = A - ^t A \quad \forall A \in M(R, n, n)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Esercizio E.9.3 Si consideri l'omomorfismo tra spazi vettoriali:

$$f \ : \ R^2 \longrightarrow R^2$$

definito da:

$$f[(x, y)] = (x, x)$$

Determinare nucleo e immagine di f.

9.4 Soluzioni esercizi

Soluzione dell'esercizio E.9.1 Ricordare che si ha

$$^t(A+B) = ^t A + ^t B$$

$$^t(kA) = k(^tA)$$

Soluzione dell'esercizio E.9.2 Analoga a quella dell'esercizio precedente.

Soluzione dell'esercizio E.9.3 Si ha $\ker \phi = AS(\mathbb{R}, n)$ e $\phi(M(\mathbb{R}, n)) = S(\mathbb{R}, n)$.

Soluzione dell'esercizio E.9.4 Si ha $\ker \psi = S(\mathbb{R}, n)$ e $\psi(M(\mathbb{R}, n)) = AS(\mathbb{R}, n)$.

Soluzione dell'esercizio E.9.5 $\ker f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $f(\mathbb{R}^2) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.