GEOMETRIA II
INGEGNERIA GESTIONALE
Fac-simile d'esame
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [5 punti]

Sia dato un campo $\mathbb{K}$. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{K}[x]$. Per ogni intero non negativo i sia dato un polinomio $f_i(x)$ in $\mathbb{K}[x]$ di grado i.
A tal proposito, ricordiamo che il grado del polinomio nullo è, per definizione, uguale al grado -1.
Fissato un intero positivo n si dimostri che $\{f_0(x), f_1(x), \ldots, f_{n-1}(x)\}$ è una base per $\mathbb{K}^n[x]$.

SECONDO ESERCIZIO [12 punti]

Si consideri lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi $\mathbb{R}[x]$ a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$ nell'indeterminata x. Siano a_1, a_2, ..., a_p elementi distinti di $\mathbb{R}$. Si indichi con $E(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}[x]$ formato da tutti i polinomi $f(x)$ tali che $f(a_1) = f(a_2) = \cdots = f(a_p) = 0$.

1. Si dimostri che $E(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ su $\mathbb{R}$.
2. Si dimostri che la funzione $\varphi : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^p$ definita da:
$$\varphi(f(x)) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p))$$
è un omomorfismo tra spazi vettoriali.
3. Si dimostri che φ è suriettivo e si calcoli il nucleo di φ.

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri l'omomorfismo tra spazi vettoriali $\vartheta :\ \mathbb{R}^3[x] \longrightarrow M(2,2,\mathbb{R})$ definito da:
$$\vartheta(f(x)) = \begin{pmatrix} f(0) & f(0)+f(1) \\ f(0)-f(1) & f(1) \end{pmatrix}$$

1. Si determini la matrice rappresentativa di ϑ rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^3[x]$ e $M(2,2,\mathbb{R})$.
2. Si verifichi che $\{1, x-1, x^2-x\}$ è una base di $\mathbb{R}^3[x]$, che
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$
è una base di $M(2,2,\mathbb{R})$ e determinare la matrice rappresentativa di ϑ rispetto a tali basi.

QUARTO ESERCIZIO [5 punti]

Verificare se le seguenti matrici sono simili.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$