

GEOMETRIA II
INGEGNERIA GESTIONALE
Soluzione del facsimile d'esame

PRIMO ESERCIZIO

Consideriamo la base canonica di $\mathbb{K}^n[x]$. Per dimostrare che $f_0(x), f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)$ formano una base di $\mathbb{K}^n[x]$, dimostriamo che la matrice A avente come colonne le coordinate di tali vettori relative alla base canonica è invertibile.

Abbiamo che un polinomio $f(x)$ si dice di grado i se il suo coefficiente di grado i è non nullo e tutti i coefficienti di grado superiore ad i sono nulli.

Sia $f_0(x) = a_0$ il polinomio di grado 0. Si ha $a_0 \neq 0$.

Sia $f_1(x) = \dots + a_1x$ il polinomio di grado 1. Si ha $a_1 \neq 0$.

In generale, dato $i = 0, \dots, n-1$, sia $f_i(x) = \dots + a_ix$ il polinomio di grado i . Si ha $a_i \neq 0$.

Osserviamo che la matrice A è una matrice diagonale superiore e che quindi:

$$\det A = a_0 a_1 \dots a_{n-1}$$

Si ha che $\det A \neq 0$ perché tutti i suoi fattori sono non nulli.

SECONDO ESERCIZIO

1. L'insieme $E(a_1, a_2, \dots, a_r) \neq \emptyset$: infatti contiene il polinomio nullo.
 Siano ora $f(x)$ e $g(x)$ due elementi di $E(a_1, a_2, \dots, a_r)$, sia $h(x)$ un elemento di $\mathbb{R}[x]$ e sia $h \in \mathbb{R}$. Allora per ogni i , $1 \leq i \leq r$, risulta:

$$\begin{aligned}(f+g)(a_i) &= f(a_i) + g(a_i) = 0 + 0 = 0, \\ (hf)(a_i) &= hf(a_i) = h0 = 0.\end{aligned}$$

Dunque, i polinomi $f(x)+g(x)$, e $(hf)(x)$ appartengono a $E(a_1, a_2, \dots, a_r)$. Quest'ultimo è pertanto un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

2. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due elementi di $R[x]$ e sia $h \in R$. Allora per ogni i , $1 \leq i \leq r$, risulta:

$$\begin{aligned}(f+g)(a_i) &= f(a_i) + g(a_i), \\ (hf)(a_i) &= hf(a_i).\end{aligned}$$

Dunque si ha:

$$\begin{aligned}\varphi(f(x) + g(x)) &= ((f+g)(a_1), (f+g)(a_2), \dots, (f+g)(a_r)) = \\ &= (f(a_1) + g(a_1), f(a_2) + g(a_2), \dots, f(a_r) + g(a_r)) = \\ &= (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_r)) + (g(a_1), g(a_2), \dots, g(a_r)) = \\ &= \varphi(f(x)) + \varphi(g(x))\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\varphi(hf(x)) &= ((hf)(a_1), (hf)(a_2), \dots, (hf)(a_r)) = \\ &= (hf(a_1), hf(a_2), \dots, hf(a_r)) = \\ &= h(f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_r)) = h\varphi(f(x)).\end{aligned}$$

Pertanto φ è un omomorfismo.

3. Dimostriamo innanzitutto che φ è surgettivo.

Sia $(b_1, b_2, \dots, b_p)$ un qualsiasi elemento di R^p : allora esiste uno e un solo polinomio $f(x)$ di $\mathbb{R}^p[x]$ tale che $f(a_i) = b_i$ per $1 \leq i \leq p$. Ma allora $\varphi(f(x)) = (b_1, b_2, \dots, b_p)$.

Dobbiamo ora determinare i polinomi appartenenti al nucleo di φ .

Sia $f(x) \in \ker \varphi$. Quindi $\varphi(f(x)) = 0$. Ma, dalla definizione di φ segue allora:

$$\varphi(f(x)) = (f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_p)) = (0, 0, \dots, 0)$$

Pertanto $\ker \varphi = E(a_1, a_2, \dots, a_p)$.

TERZO ESERCIZIO

1. La base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ è formata dai vettori $1, x$ e x^2 , mentre la base canonica di $M(2, \mathbb{R})$ è formata dalle matrici:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo le immagini tramite ϑ dei vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$:

$$\vartheta(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + 2E_2 + E_4,$$

$$\vartheta(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = E_2 - E_3 + E_4,$$

$$\vartheta(x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = E_2 - E_3 + E_4.$$

Allora la matrice rappresentativa di ϑ rispetto alle basi canoniche è:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cui i -esima colonna è data dalle componenti rispetto alla base canonica di $M(2, \mathbb{R})$ dell'immagine dell' i -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

2. La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono date dalle componenti dei vettori $\{1, x-1, x^2-x\}$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ è, come può verificarsi facilmente, una matrice invertibile e, pertanto, i vettori $\{1, x-1, x^2-x\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3[x]$. Analogamente la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono date dalle componenti delle matrici

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rispetto alla base canonica $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $M(2, 2, \mathbb{R})$ è invertibile e, pertanto, le matrici $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ formano una base di $M(2, 2, \mathbb{R})$. La matrice rappresentativa di ϑ rispetto a queste basi è $A' = N^{-1}AM$. Alternativamente possiamo calcolare l'immagine di $1, x - 1$ e $x^2 - x$:

$$\begin{aligned}\vartheta(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1, \\ \vartheta(x-1) &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -B_1 - B_3 + B_4, \\ \vartheta(x^2-x) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

e considerare la matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

le cui colonne sono le componenti rispetto alla base $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$ delle immagini dei vettori della base $\{1, x - 1, x^2 - x\}$.

QUARTO ESERCIZIO

Ambedue le matrici A e B sono triangolari superiori. Pertanto i loro autovalori sono gli elementi della loro diagonale principale.

Ne segue che sia A che B hanno come autovalore 4 con molteplicità algebrica uguale a 3.

Calcolando il rango della matrice $A - 4I$ si nota che esso è uguale a 1. Pertanto la molteplicità geometrica di 4 per la matrice A è uguale a 2.

In modo analogo si verifica che la molteplicità geometrica di 4 rispetto alla matrice B è uguale a 1.

Ne segue che le matrici A e B , poiché hanno lo stesso autovalore con molteplicità geometriche differenti, non sono simili.