GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 31 marzo 2006
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti]

Sia data la matrice $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{R}, 100, 100)$ definita da:

$$a_{ij} = 2i + 2j$$

1. Verificare se A è simmetrica.
2. Calcolare il rango di A.

SECONDO ESERCIZIO [9 punti]

Sia $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'omomorfismo tra spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ associato, relativamente alle basi canoniche dei due spazi, alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base per il nucleo di f.
2. Determinare un sottospazio vettoriale V di $\mathbb{R}^3$ tale che $\mathbb{R}^3 = \ker f \oplus V$.
3. Verificare se l'omomorfismo $f|_V : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ è iniettivo.

TERZO ESERCIZIO [6 punti]

Siano V e W spazi vettoriali su un campo K aventi dimensione uguale a 3 e 4 rispettivamente.
Si considerino i seguenti sottoinsiemi dello spazio vettoriale $\mathrm{Hom}(V, W)$:

$$H' = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \ker f \neq \{\mathbf{0}\}\}$$

$$H'' = \{f \in \mathrm{Hom}(V, W) \mid \ker f = \{\mathbf{0}\}\}$$

1. Verificare se H' è un sottospazio vettoriale.
2. Verificare se H'' è un sottospazio vettoriale.
3. Nei casi in cui si ha un sottospazio vettoriale determinarne una base.

QUARTO ESERCIZIO [9 punti] Sia data la seguente matrice $A \in M(\mathbb{R}, 3, 3)$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Dimostrare che la matrice A è simile in $\mathbb{R}$ alla sua trasposta ${}^tA$
2. Determinare $M \in GL(\mathbb{R}, 3)$ tale che ${}^tA = M^{-1}AM$.