

GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 31 marzo 2006 - Soluzione

Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti]

1. La matrice A è simmetrica. Infatti:

$$a_{ij} = 2i + 2j = 2j + 2i = a_{ji}$$

2. Per calcolare il rango di A osserviamo la matrice A .
Si verifica facilmente che la matrice A è data da:

$$A = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+4 & \dots & 2+2j & \dots & 2+200 \\ 4+2 & 4+4 & \dots & 4+2j & \dots & 4+200 \\ 6+2 & 6+4 & \dots & 6+2j & \dots & 6+200 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \ddots & \vdots \\ 2i+2 & 2i+4 & \dots & 2i+2j & \dots & 2i+200 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 200+2 & 200+4 & \dots & 200+2j & \dots & 200+200 \end{pmatrix}$$

Sappiamo che il rango di una matrice non cambia se la trasformiamo per mezzo di operazioni elementari di riga.

Notiamo che se sottraiamo alla seconda riga la prima riga otteniamo una riga avente tutti gli elementi uguali a 2.

Questa riga è linearmente indipendente dalla prima riga.

Analogamente se sottraiamo alla terza riga la prima riga otteniamo una riga avente tutti gli elementi uguali a 4. La terza riga è quindi linearmente dipendente dalla seconda riga. Possiamo far ciò per tutte le altre righe della matrice.

In generale sottraendo alla i -sima riga la prima riga otteniamo una riga avente tutti gli elementi uguali a $2i-2$. La i -sima riga è quindi linearmente dipendente dalla seconda riga.

In definitiva, operando in questo modo, otteniamo una matrice B avente le prime due righe linearmente indipendenti e tutte le altre righe linearmente dipendenti dalla seconda.

Segue che il rango di B è uguale a 2. Quindi anche il rango di A è uguale a 2.

Abbiamo risposto alla domanda 2.

Vogliamo ora far vedere un metodo alternativo per calcolare il rango di A . Osserviamo che il minore:

$$B = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+4 \\ 4+2 & 4+4 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da 0.

Pertanto il rango di A è maggiore o uguale a 2.

Dal teorema dell'orlare segue che, se tutti i minori di A ottenuti orlando B (aggiungendo cioè a B una riga e una colonna di A) hanno determinante

nullo, allora il rango di A è uguale a 2.

Orlando il minore B con la i -sima riga e la j -sima colonna otteniamo il minore:

$$B = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+4 & 2+2j \\ 4+2 & 4+4 & 4+4j \\ 2i+2 & 2i+4 & 2i+2j \end{pmatrix}$$

Sottraendo alla seconda e alla terza riga di B la prima riga otteniamo una matrice B' avente lo stesso determinante di B . Si ha:

$$B' = \begin{pmatrix} 2+2 & 2+4 & 2+2j \\ 2 & 2 & 2 \\ 2i-2 & 2i-2 & 2i-2 \end{pmatrix}$$

La matrice B' ha le ultime due righe proporzionali e quindi ha il determinante uguale a 0.

SECONDO ESERCIZIO [9 punti]

- Osserviamo che la matrice A ha rango uguale a 2. Pertanto la dimensione dell'immagine di f è uguale a 2 e la dimensione di $\ker f$ è uguale a 1. Per determinare una base di $\ker f$ è quindi sufficiente determinare un vettore non nullo la cui immagine sia il vettore nullo. Osserviamo che la prima e la seconda colonna della matrice A sono uguali. Pertanto

$$f[(1, 0, 0)] = f[(0, 1, 0)]$$

Da ciò segue che il vettore $(1, -1, 0)$ appartiene al nucleo. Esso forma pertanto una base del nucleo di f .

- Un supplementare di $\ker f$ ha dimensione uguale a 2. Per determinarne una base usiamo il teorema del completamento della base. Cerchiamo quindi due vettori che, insieme a $(1, -1, 0)$, formino una base di $\mathbb{R}^3$. Sappiamo che possiamo scegliere questi vettori tra i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Due tali vettori sono $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$, infatti la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

- Dimostriamo che $f|_V$ è iniettivo dimostrando che il suo nucleo è formato dal solo vettore nullo. Sia $v \in V$ tale che $f|_V(v) = 0$. Ma $f|_V(v) = f(v)$ e quindi $v \in \ker f$. Ma $v \in V$ e $V \cap \ker f = \{0\}$. Pertanto $v = 0$.

TERZO ESERCIZIO [6 punti]

- Fissata una base in ognuno dei due spazi vettoriali, consideriamo la matrice associata ad ogni omomorfismo relativamente a tali basi. Agli omomorfismi di H' sono associate matrici aventi rango minore di 3. Indichiamo

con M' l'insieme di tali matrici.

Pertanto H' è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(V, W)$ se e solo se M' è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 4, 3)$.

Mostriamo che M' non è chiuso rispetto all'operazione di addizione considerando il seguente controesempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K' \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K' \quad A + B \notin K'$$

Segue che M' e H' non sono sottospazi vettoriali:

2. Sappiamo che l'elemento nullo di $\text{Hom}(V, W)$ è l'omomorfismo nullo. Esso ha ovviamente il nucleo uguale a $V \neq \mathbf{0}$.
Pertanto H'' non è un sottospazio vettoriale perché non contiene l'elemento nullo.
3. Né H' né H'' sono sottospazi vettoriali. Non dobbiamo quindi determinare alcuna base.

QUARTO ESERCIZIO [9 punti]

1. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è triangolare inferiore. I suoi autovalori sono quindi $-1, 2$ e 0 . Essendo essi di molteplicità algebrica uguale a 1, si ha che la matrice A è simile alla matrice diagonale:

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Analogamente si ha che la matrice tA , che è triangolare superiore, è simile alla matrice D .

Pertanto le matrici A e tA , essendo simili ad una stessa matrice, sono simili tra loro. Quest'ultima affermazione segue dal fatto che la relazione di similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza.

2. Dal punto precedente segue che esiste $P \in GL(\mathbb{R}, 3)$ tale che

$$D = P^{-1}AP$$

Analogamente esiste $S \in GL(\mathbb{R}, 3)$ tale che

$$D = S^{-1}BS$$

Da quest'ultima uguaglianza segue

$$B = SDS^{-1}$$

e quindi:

$$B = SDS^{-1} = SP^{-1}APS^{-1} = (PS^{-1})^{-1}A(PS^{-1})$$

Pertanto la matrice M cercata è:

$$M = PS^{-1}$$

Per completare l'esercizio dobbiamo determinare le matrici P e S .

Iniziamo con la matrice A . Sia f l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato a A relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esaminando la matrice A si osserva subito che $(0, 1, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono autovettori di f con autovalori 2 e 0 rispettivamente.

Dobbiamo trovare un autovettore di f con autovalore -1 . Esaminando la matrice

$$A + 1I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

osserviamo che $(3, -1, 0)$ è autovettore di f con autovalore -1 . Da tutto ciò segue che si ha:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Passiamo alla matrice

$${}^tA = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia g l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato a tA relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Esaminando la matrice tA si osserva subito che $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ sono autovettori di g con autovalori -1 e 0 rispettivamente.

Dobbiamo trovare un autovettore di g con autovalore 2. Esaminando la matrice

$${}^tA - 2I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

osserviamo che $(1, 3, 0)$ è autovettore di g con autovalore 2. Da tutto ciò segue che si ha:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$