GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 10 aprile 2006
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti]

Siano dati in un campo $\mathbb{K}$ due suoi elementi a e b. Si consideri l'equazione in $\mathbb{K}$ nell'incognita x.

$$ax + b = 0$$

1. Determinare per quali elementi a e b di $\mathbb{K}$ esistono soluzioni dell'equazione.
2. Nei casi in cui esiste almeno una soluzione, determinare tutte le soluzioni.

Nello svolgere l'esercizio richiamarsi esplicitamente alla definizione di campo e dimostrare, a partire dalla definizione di campo, ogni teorema sui campi eventualmente usato.

SECONDO ESERCIZIO [10 punti]

Si considerino gli spazi vettoriali $M(\mathbf{R}, 2, 3)$ e $M(\mathbf{R}, 3, 2)$

1. Verificare che la funzione $f: \quad M(\mathbf{R}, 2, 3) \longrightarrow M(\mathbf{R}, 3, 2)$ che associa ad ogni matrice la sua trasposta è un omomorfismo tra spazi vettoriali.
2. Determinare la matrice associata a f rispetto alle basi canoniche dei due spazi vettoriali.
3. Date le matrici
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
dimostrare che l'insieme $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ è una base di $M(\mathbf{R}, 2, 3)$
4. Dimostrare che l'insieme
$$\left\{B_1 = {}^tA_1, B_2 = {}^tA_2, B_3 = {}^tA_3, B_4 = {}^tA_4, B_5 = {}^tA_5, B_6 = {}^tA_6\right\}.$$
è una base di $M(\mathbf{R}, 3, 2)$.
5. Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ e $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$

TERZO ESERCIZIO [7 punti]

Dimostrare il seguente teorema:
Sia $A \in M(\mathbb{R}, p, q)$ e $B \in GL(\mathbb{R}, q, q)$. Allora il rango di A è uguale al rango di AB.

QUARTO ESERCIZIO [7 punti] Determinare quattro matrici A, B, C, D non simili aventi tutte come polinomio caratteristico il polinomio

$$p(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2$$

Verificare esplicitamente che ognuna delle quattro matrici determinate non è simile ad alcuna delle altre tre.