GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 21 aprile 2006
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [8 punti] Fissato un intero positivo n, sia $A = (a_{ij})$ la matrice di ordine n definita da:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \ i+j = n+1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. Verificare la verità o falsità della seguente affermazione: la matrice A equivalente per riga alla matrice identica.
2. Calcolare il determinante di A nel caso di $n = 100$.
3. Calcolare il determinante di A per ogni n.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si consideri la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, se esiste, una matrice $B \in M(\mathbb{R}, 3, 3)$ di rango uguale a 1 tale che $B \cdot A = 0$
2. Determinare, se esiste, una matrice $B \in M(\mathbb{R}, 3, 3)$ di rango uguale a 2 tale che $B \cdot A = 0$

Suggerimento. Si pensino le matrici A e B come endomorfismi di $\mathbb{R}^3$.

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Sia A una matrice di ordine n formata da un blocco A_1 di ordine n_1, un blocco A_2 di ordine n_2.

1. Dimostrare che, se la matrice A è invertibile, allora anche le matrici A_1 e A_2 sono invertibili.
2. Dimostrare che se A invertibile, allora A^{-1} una matrice formata da due blocchi. Determinare tali blocchi.

QUARTO ESERCIZIO [6 punti] Verificare se le seguenti due matrici sono simili.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$