GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 21 aprile 2006
Soluzione

PRIMO ESERCIZIO [8 punti] Consideriamo la prima riga della matrice A.

I suoi elementi sono del tipo a_{1j}. Segue che l'unico elemento non nullo della prima riga è l'elemento a_{1n}, cioè l'ultimo.
Analogamente l'unico elemento non nullo della seconda riga è il penultiplo. E così via.
L'ultima riga della matrice A ha come unico elemento non nullo il primo elemento. Da ciò segue che se scambiamo tra loro la prima e l'ultima riga e poi la seconda con la penultima e così via, otteniamo la matrice identica.
Pertanto la matrice A equivalente per riga alla matrice identica.
Da tutto ciò segue che si ha $\det A = (-1)^s$, dove s è il numero di scambi di riga che abbiamo fatto.
Per capire quanti scambi di riga dobbiamo fare distinguiamo due casi: n pari e n dispari.
Sia n pari. Quindi $n = 2p$. Scambiamo la prima riga con l'ultima riga ($2p + 1 - 1 = 2p$-sima), la seconda con la penultima ($2p + 1 - 2 = 2p - 1$-sima) e così via fino a scambiare la p-sima con la $2p + 1 - p = p + 1$-sima. Abbiamo fatto p scambi.
Sia ora n dispari, quindi $n = 2p + 1$. Scambiamo la prima riga con l'ultima riga ($2p+1+1-1 = 2p+1$-sima), la seconda con la penultima ($2p+1+1-2 = 2p$-sima) e così via fino a scambiare la p-sima con la $2p + 1 + 1 - p = p + 2$-sima. Lasciamo inalterata la $p + 1$-sima riga. Anche in questo caso abbiamo fatto p scambi.
Pertanto $detA = (-1)^p$.
Dobbiamo quindi distinguere se p è pari o dispari.
Quindi, se $p = 2m$ abbiamo $\det A = 1$, se $p = 2m + 1$, allora $\det A = -1$.
In definitiva abbiamo:
se $n = 4m$ oppure $n = 4m + 1$, allora $\det A = 1$,
se $n = 4m + 2$ oppure $n = 4m + 3$, allora $detA = -1$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Cercare una matrice $B \in M(\mathbb{R}, 3, 3)$ tale che $BA = 0$ equivale a determinare un endomorfismo g di $\mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia l'endomorfismo nullo.
Osserviamo che la matrice A ha rango uguale a 2 e quindi l'immagine di f ha dimensione uguale a 2. Essa ha come base $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)\}$.
Il nucleo dell'endomorfismo g deve quindi contenere l'immagine di f.

1. Poniamo quindi
$$g(\mathbf{e}_1) = g(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$$
   Vogliamo poi che la matrice B abbia rango uguale 1. Dobbiamo quindi imporre che la dimensione dell'immagine di g sia uguale a 1. Dobbiamo quindi imporre $g(\mathbf{e}_2) \neq 0$. Poniamo, per esempio, $g(\mathbf{e}_2) = (1, 0, 0)$.
   La matrice B cercata è la matrice associata a g relativamente alla base

canonica:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Osserviamo che, per quel che abbiamo visto prima, il nucleo di g deve avere dimensione maggiore o uguale a 2. Pertanto l'immagine di g deve avere dimensione minore o uguale a $3 - 2 = 1$. Non esiste quindi alcuna matrice B di rango uguale a 2 tale che $BA = 0$.

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Consideriamo l'endomorfismo f associato

alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di R^n avente come base i primi n_1 vettori di tale base e sia V_2 il sottospazio vettoriale di R^n avente come base gli ultimi n_2 vettori di tale base. Poiché la matrice A è a blocchi, i sottospazi V_1 e V_2 sono invarianti per f e le matrici associate a $f|_{V_1}$ e a $f|_{V_2}$ rispetto alle loro basi sono le matrici A_1 e A_2.

1. Se la matrice A invertibile, allora l'endomorfismo f è un isomorfismo. In particolare $f|_{V_1}$ è un isomorfismo e quindi la matrice A_1 ad esso associata è invertibile.
   In modo analogo si dimostra che A_2 è invertibile.

2. Consideriamo l'endomorfismo f^{-1}. La matrice ad esso associata relativamente alla base canonica è la matrice A^{-1}.
   Dal momento che $f(V_1) = V_1$, si ha $f^{-1}(V_1) = V_1$.
   Analogamente $f^{-1}(V_2) = V_2$.
   Dal momento che V_1 e V_2 sono invarianti per f^{-1}, si ha che la matrice A^{-1} ad essa associata è una matrice a blocchi.
   Il primo blocco di A^{-1} è uguale alla matrice associata a $f^{-1}|_{V_1}$. Ma quest'ultima è proprio la matrice A_1^{-1}.
   In modo analogo si dimostra che il secondo blocco è la matrice A_2^{-1}.

QUARTO ESERCIZIO [6 punti] Osserviamo che le matrici A e B hanno

entrambe 0 come autovalore con molteplicità algebrica uguale a 4. Entrambe hanno rango uguale a 2 e quindi hanno l'autovalore 0 di molteplicità geometrica uguale a $4 - 2 = 2$.
Osserviamo però che $A^2 = 0$ mentre $B^2 \neq 0$. Pertanto le matrici A^2 e B^2 non sono simili.
Ne segue che le matrici A e B non sono simili. Se infatti lo fossero, sarebbero simili anche le matrici A^2 e B^2 (vedere teorema 14.9 delle note del corso).