GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 7 luglio 2006
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [8 punti] Sia $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{R}, 100, 100)$ una matrice tale che, per ogni $i = 2, \dots, 100$ e $j = 1, \dots, 100$, si abbia $a_{ij} = i a_{1j}$

1. Verificare se A simmetrica.
2. Calcolare il rango di A.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{e_1, \dots, e_{100}\}$ una sua base. Sia f un endomorfismo di V e sia $A = (a_{ij})$ la matrice ad esso associata relativamente alla base assegnata. Sia infine assegnato il seguente vettore $v = \sum_{i=1}^{100} (-5) e_i$. Verificare la verità o falsità di ognuna delle seguenti affermazioni:

1. v è un autovettore di f se e solo se esiste p tale che, per ogni $i = 1, \dots, 100$, si ha $\sum_{j=1}^{100} a_{ij} = p$
2. v è un autovettore di f se e solo se esiste p tale che, per ogni $j = 1, \dots, 100$, si ha $\sum_{i=1}^{100} a_{ij} = p$

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 3:

$$V = \{p(x) \mid p(1) = 0\} \quad W = \{a(1 + x + x^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

1. Verificare se si ha $\mathbb{R}^3[x] = V \oplus W$
2. Determinare, se esiste, un endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ avente come nucleo V e come immagine W.

QUARTO ESERCIZIO [6 punti] Al variare di a e b in $\mathbb{R}$, siano date le seguenti due matrici.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare per quali valori di a e b le due matrici sono simili
2. Determinare per quali valori di a e b la matrice A è diagonalizzabile.
3. Determinare per quali valori di a e b la matrice B è diagonalizzabile.