GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 13 settembre 2006
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [8 punti] Dimostrare il seguente teorema:

Sia dato uno spazio vettoriale E su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ e un endomorfismo f di E. L'endomorfismo f è un isomorfismo se e solo se $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è una base di E.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Sia $\mathbb{R}^5[x]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore di 5.

1. Dimostrare che la funzione d che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^5[x]$ la sua derivata è un endomorfismo di $\mathbb{R}^5[x]$.
2. Determinare la matrice A associata a d relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5[x]$.
3. La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare la sua diagonalizzata. In caso negativo spiegare perché.

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ dei polinomi a coefficienti reali di grado minore di 3:

$$V = \{p(x) \mid p(2) = 0\} \quad W = \{a(1 + x + x^2) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

1. Determinare una base di V e una base di W
2. Verificare se si ha $\mathbb{R}^3[x] = V \oplus W$
3. Determinare, se esiste, un endomorfismo di $\mathbb{R}^3[x]$ avente come nucleo V e come immagine W.

QUARTO ESERCIZIO [6 punti] Siano date le seguenti due matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Le due matrici sono simili? In caso affermativo determinarne una matrice di passaggio. In caso negativo spiegare perché.
2. La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare la sua diagonalizzata. In caso negativo spiegare perché.
3. La matrice B è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare la sua diagonalizzata. In caso negativo spiegare perché.