Capitolo 7

Somma diretta di sottospazi vettoriali

7.1 Introduzione

Introduciamo un caso particolare di somma di due sottospazi vettoriali: la somma diretta. Anche questo argomento è stato visto nel corso di geometria. Rimandiamo quindi al testo di geometria per ulteriori esempi di somme dirette di due sottospazi vettoriali.
Generalizziamo infine la defizione di somma diretta al caso di un numero finito di sottospazi vettoriali.

7.2 Somma diretta

Definizione 7.1 Sia dato uno spazio vettoriale E. Siano U, V e W suoi sottospazi vettoriali. Il sottospazio vettoriale U si dice **somma diretta** di V e W se si ha:

$$V \cap W = \{\mathbf{0}\} \quad , \quad V + W = U$$

Se U è somma diretta di V e W, si usa il simbolo:

$$U = V \oplus W$$

Teorema 7.2 *Sia dato uno spazio vettoriale E. Siano U, V e W suoi sottospazi vettoriali. Si ha che $U = V \oplus W$ se e solo se ogni vettore* $\mathbf{u}$ *di U si può scrivere* **in modo unico** *come* $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ *con* $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$.

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo innanzitutto che, se $U = V \oplus W$, allora ogni vettore di U si scrive in uno ed in solo modo.
Osserviamo innanzitutto che, poiché $U = V + W$, ogni vettore si scrive in almeno un modo come somma di un vettore di V e di un vettore di W.
Dimostriamo che tale scrittura è unica.

Sia $u = v + w = v' + w'$ con $u \in U$, $v \in V, v' \in V, w \in W, w' \in W$.
Ma allora si ha:

$$v - v' = w' - w$$

Poiché V è un sottospazio vettoriale $v - v' \in V$. Poiché W è un sottospazio vettoriale $x' - w \in V$.
Segue quindi $v - v' = w' - w \in V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Da cui $v = v'$ e$w = w'$.
Dobbiamo ora dimostrare che, se la scrittura è unica, allora $U = V \oplus W$.
Il fatto che ogni vettore di U si scriva come somma di un vettore di V e di un vettore di W implica $U = V + W$.
Dobbiamo dimostrare che si ha $V \cap W = \{\mathbf{0}\}$. Ispirandosi a 6.6 si dimostra (farlo) che, se l'intersezione non fosse formata dal solo vettore nullo, la scrittura non sarebbe unica. ∎

Teorema 7.3 *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ una base di V e $\{\mathbf{w}_{p+1}, \ldots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ una base di W. Allora $V + W = V \oplus W$ se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \ldots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ è una base di $V + W$.*

DIMOSTRAZIONE Utilizzare la formula di Grassman. ∎

Teorema 7.4 *Si ha:*

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

DIMOSTRAZIONE Ovvia.

Definizione 7.5 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $E = V \oplus W$. Allora i sottospazi V e W si dicono **supplementari** in E. △

Esempio 7.6 Dato $V^2(\pi, O)$ e due suoi sottospazi r e s di dimensione 1 intersecantisi nel solo punto O (quindi r e s sono due rette passanti per O non coincidenti) si ha $V^2(\pi, O) = r \oplus s$. △

Esempio 7.7 Dato $V^3(O)$, sia r una retta passante per O e π un piano passante per O non contenente la retta r. Si ha: $V^3(O) = r \oplus \pi$. △

Esercizio di base EB.7.1 Si consideri lo spazio vettoriale dei complessi $\mathbb{C}$ sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. L'insieme $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$. L'insieme $\mathfrak{I}$ dei numeri complessi aventi parte reale nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ (esercizio). Verificare che si ha $C = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{I}$. △

Ci chiediamo se, dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita ed un suo sottospazio vettoriale V, esista un supplementare W di V in E.
Studiamo innanzitutto i casi ovvi. Se $V = E$, allora il supplementare di V è il sottospazio nullo.
Viceversa, il supplementare dello spazio nullo è lo spazio E.

Ma cosa si può dire se V è un sottospazio proprio di E? Vediamo qualche esempio.

Esempio 7.8 Dato $V^2(\pi, O)$, un supplementare di una retta r passante per O è una qualsiasi retta s passante per O non coincidente con r. Notiamo che di tali rette ne esiste più di una. $\triangle$

Esempio 7.9 Consideriamo ora $V^3(O)$ e una retta r passante per O. Un supplementare di r è un qualsiasi piano π passante per O non contenente la retta r. Anche in questo caso vi sono molti supplementari. $\triangle$

Noi vogliamo dimostrare che ogni sottospazio vettoriale è dotato di supplementare. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente teorema.

Teorema 7.10 (del completamento della base) *Sia dato uno spazio vettoriale E con base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$.*
Dati comunque p vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ linearmente indipendenti di E (e quindi $p \leq n$), si possono scegliere $n-p$ vettori tra i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ tali che, aggiunti ai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$, essi formino ua base di E.

Dimostrazione Consideriamo la matrice A di ordine $p+n, n$ avente le prime p colonne formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ relative alla base scelta in E e le altre n colonne n formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ relative alla base scelta in E.
Osserviamo che la il minore di A formato da tutte le n righe di A e dalle ultime n colonne è la matrice identica I. Quindi $\operatorname{rk} A = n$.
D'altronde, poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti, esiste un minore invertibile B di ordine p della matrice A in cui intervengano solo le prime p colonne di A. Dal teorema dell'orlare studiato al primo anno segue che, poiché $\operatorname{rk} A = n$ è possibile aggiungere al minore B le ulteriori $n-p$ righe e $n-p$ colonne scelte tra le ultime n colonne di A in modo tale da ottenere un minore C di A che sia invertibile.
Le n colonne della matrice C sono linearmente indipendenti. Sono quindi linearmente indipendenti gli n vettori corrispondenti alle colonne di C. Questi vettori formano la base cercata. $\blacksquare$

Teorema 7.11 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia V un suo sottospazio vettoriale. Allora esiste almeno un supplementare di V in E.*

Dimostrazione Lasciata per esercizio. Suggerimento: prendere esempio dalla dimostrazione del teorema di completamento di una base. $\blacksquare$

Esempio 7.12 Dato lo spazio vettoriale $R^3[x]$, sia V il suo sottospazio avente come base $\{p(x) = 1 + x + x^2\}$. Vogliamo determinare un supplementare di V. Per fare ciò consideriamo la base canonica di $R^3[x]$ e consideriamo la matrice A avente come prima colonna le cooordinate del vettore $p(x)$ e come seconda, terza e quarta colonna le coordinate dei tre vettori della base canonica di $R^3[x]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il minore formato dalle prime tre colonne è invertibile.
Quindi $\{1 + x + x^2, 1, x\}$ è una base di $R^3[x]$.
Il sottospazio avente come base $\{1, x\}$ è supplementare di V. $\triangle$

Nota 7.13 Osserviamo che, nell'esempio, precedente non vi è un solo supplementare di V.
Per esempio, si può vedere che anche il sottospazio avente come base $\{x, x^2\}$ è supplementare di V. △

Definizione 7.14 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano $V_1, \ldots, V_p$ sottospazi vettoriali di E. Si dice che un sottospazio U è **somma diretta** di $V_1, \ldots, V_p$, in simboli:

$$U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$$

se, dato comunque un vettore $\mathbf{u} \in U$, esiste una sola p-upla di vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p$ con $\mathbf{v}_1 \in V_1, \ldots, \mathbf{v}_p \in V_p$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_p$. △

Nota 7.15 Il teorema 7.2 ci assicura che, nel caso di $p = 2$, quest'ultima definizione di somma diretta coincide con la definizione data in precedenza. △

Esempio 7.16 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$.
Si dimostra facilmente (farlo) che i seguenti tre sottoinsiemi:

$$V_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}\ ,\ V_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}\ ,\ V_3 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Si verifica (farlo) che si ha $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. △

Teorema 7.17 (generalizzazione del teorema 7.3) *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano $V_1, \ldots V_p$ suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia:*
$\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}\}$ una base di V_1.
Sia $\{\mathbf{e}_{q_1+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_2}\}$ una base di V_2
... e sia infine $\{\mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_p}\}$ una base di V_p.
Allora:
$U = V_1 \oplus \cdots \oplus V_p$ se e solo se $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{q_1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \ldots, \mathbf{e}_{q_p}\}$ è una base di U.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.7.2 Dato lo spazio vettoriale $V^3(O)$ siano r_1, r_2, r_3 tre rette passanti per O non complanari. Si ha $V^3(O) = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$. △

7.3 Soluzione degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.1 Usiamo il teorema 7.3.
Il vettore $\mathbf{v}_1 = 1$ è una base di $\mathbb{R}$.
$\mathbf{v}_2 = i$ è una base di $\mathfrak{I}$.
Sappiamo che $\{1, i\}$ é una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. Pertanto da 7.3 segue $C = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{I}$.

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.2 Per dimostrare ciò usiamo il teorema 7.17.
Sia $P_1 \neq 0$ un punto di r_1. Quindi $\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}\}$ è una base di r_1. Analogamente, dati $P_2 \in r_2$ e $P_3 \in r_3$ distinti da O, si ha che $\{\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}\}$ e $\{\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP_3}\}$ sono basi di r_2 e r_3 rispettivamente.
I punti O, P_1, P_2, P_3 non sono complanari e quindi:

$$\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}, \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}, \mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP_3}\}$$

è una base di $V^3(O)$. Ne segue $V^3(O) = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$.

7.4 Esercizi

Esercizio E.7.1 Sia $S(\mathbb{R}, n)$ il sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ dato dalle matrici simmetriche. Quindi:

$$S(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n, n) | A = \ {}^tA\}$$

Indichiamo con $AS(\mathbb{R}, n)$ l'insieme delle matrici antisimmetriche. Quindi:

$$AS(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n, n) | A = -{}^tA\}$$

Dimostrare che $AS(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ e che si ha:

$$M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) \oplus AS(\mathbb{R}, n)$$

SUGGERIMENTO. Notare che, per ogni matrice $A \in M(R, n, n)$, si ha

$$A +{}^t A \in S(R, n) \ , \ A -{}^t A \in AS(R, n)$$

e che

$$2A = A +{}^t A + A -{}^t A$$

Esercizio E.7.2 Determinare quali condizioni bisogna assegnare ad un campo K perché si abbia:

$$M(K, n, n) = S(K, n) \oplus AS(K, n)$$

Esercizio E.7.3 Fissato il campo $\mathbb{Z}_2$, si considerino i sottospazi vettoriali di $M(\mathbb{Z}_2, n, n)$ dati da $S(\mathbb{Z}_2, n)$ e $AS(\mathbb{Z}_2, n)$. Determinare $S(\mathbb{Z}_2, n)+AS(\mathbb{Z}_2, n)$ e $S(\mathbb{Z}_2, n)\cap AS(\mathbb{Z}_2, n)$.

Esercizio E.7.4 Considerare lo spazio vettoriale $R^4[x]$. Sia V il suo sottospazio vettoriale dato da:

$$V = \{p(x) \in R^4[x] \mid p(1) = p(5) = 0\}$$

Determinare un supplementare di V.

Esercizio E.7.5 Determinare tre sottospazi vettoriali non nulli V_1, V_2, V_3 di R^5 tali che si abbia $R^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

7.5 Soluzione degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.7.1 La dimostrazione che $AS(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ è analoga alla dimostrazione che $(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$, pertanto la omettiamo. In ogni caso consigliamo di farla.
Si dimostra (farlo) che le matrici $C(i, j) = A(i, j) - A(j, i)$ con $i < j$ formano una base di $AS(\mathbb{R}, n)$. Quindi

$$\dim AS(\mathbb{R}, n) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Dobbiamo ora dimostrare che si ha:

$$M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) \oplus AS(\mathbb{R}, n)$$

Osserviamo che per ogni matrice $A \in M(\mathbb{R}, n, n$ si ha:

$$A = \frac{1}{2}(A +{}^t A) + \frac{1}{2}(A -{}^t A$$

con $\frac{1}{2}(A +^t A) \in S(\mathbb{R}, n)$ e $\frac{1}{2}(A -^t A \in AS(\mathbb{R}, n)$.
Pertanto $M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) + AS(\mathbb{R}, n)$.
Dobbiamo ora verificare che si ha $S(\mathbb{R}, n) \cap AS(\mathbb{R}, n) = \{\mathbf{O}\}$.
Si dimostra ciò usando la formula di Grassman:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n) \cap AS(\mathbb{R}, n)) = \dim S(\mathbb{R}, n) + \dim AS(\mathbb{R}, n)) - \dim(S(\mathbb{R}, n) + AS(\mathbb{R}, n))$$

quindi:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n) \cap AS(\mathbb{R}, n)) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} - n^2 = 0$$

Soluzione dell'esercizio E.7.2 Osserviamo che nella dimostrazione precedente abbiamo considerato $\frac{1}{2}$.
Il problema è capire cosa sia, in un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi, l'elemento $\frac{1}{2}$.
Si ha ovviamente $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, dove $2 = 1 + 1$, essendo 1 l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione del campo.
Sappiamo che ogni elemento non nullo di un campo è dotato di inverso.
Qui sta il punto: chi ci dice che 2 sia diverso da 0?
Vi è un altro punto delicato: la dimostrazione che le matrici $C(i, j) = A(i, j) - A(j, i)$ con $i < j$ formino una base di $AS(\mathbb{K}, n)$ è valida per ogni campo $\mathbb{K}$?
In effetti se $2 \neq 0$, la dimostrazione rimane valida (perché?). Ma se $2 = 0$ la dimostrazione non è più valida (perché?). Da tutto ciò segue che il teorema rimane vero se nel campo $\mathbb{K}$ si ha $2 \neq 0$.
Ma nel campo $\mathbb{Z}_2$ si ha $2 = 0$.
Nel prossimo esercizio mostriamo che in quest'ultimo caso il teorema non è valido.

Soluzione dell'esercizio E.7.3 In $\mathbb{Z}_2$ si ha $-0 = 0$ e $-1 = 1$, pertanto, per ogni $a \in \mathbb{Z}_2$ si ha $a = -a$.
Segue da ciò $S(\mathbb{Z}_2, n) = AS(\mathbb{Z}_2, n)$.
Pertanto $S(\mathbb{Z}_2, n) + AS(\mathbb{Z}_2, n) = S(\mathbb{Z}_2, n) \cap AS(\mathbb{Z}_2, n) = S(\mathbb{Z}_2, n) = AS(\mathbb{Z}_2, n)$

Soluzione dell'esercizio E.7.4 Si considerino in $\mathbb{R}^4[x]$, due numeri diversi da 1 e 5, per esempio 7 e 9. Si consideri la base di Lagrange $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ relativa a $1, 5, 7, 9$.
Si ha (esercizio) $V =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 >$.
Un supplementare di V è quindi $W =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 >$.

Soluzione dell'esercizio E.7.5 Si possono determinare i tre sottospazi vettoriali non nulli V_1, V_2, V_3 di $\mathbb{R}^5$ tali che si abbia $\mathbb{R}^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ in vari modi.
Fissata una qualsiasi base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ di $\mathbb{R}^5$, si può, per esempio, fissare

$$V_1 =< \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 > \ , \ V_2 =< \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 > \ , \ V_3 =< \mathbf{v}_5 >$$