Capitolo 9

Funzioni

9.1 Introduzione

Abbiamo raggruppato in questo capitolo alcune nozioni sulle funzioni che sono stati introdotti nel corso delle lezioni in vari momenti. La maggior parte di queste sono nozioni erano state già introdotte nel corso del primo anno.

9.2 Richiami sulle funzioni

Definizione 9.1 Dati due insiemi A e B, una **funzione** (o **applicazione**) tra A e B è una legge f che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento di B che viene indicato con $f(a)$. L'elemento $f(a)$ viene detto **immagine** di a attraverso f. Una funzione f tra A e B viene indicata con il simbolo $f : A \longrightarrow B$. L'insieme delle immagini degli elementi di a viene detto **immagine** di f. Esso viene indicato con il simbolo $f(A)$ o con il simbolo $\mathrm{Im} f$. Quindi $f(A) \subset B$. In altre parole:

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}$$

Dato $b \in B$, chiamiamo **controimmagine** (o **fibra**) di b il sottoinsieme di A dato dagli elementi di A le cui immagini coincidono con b. Tale sottoinsieme di A viene indicato con il simbolo $f^{-1}(b)$. In altre parole:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Definizione 9.2 Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ e dato $A' \subset A$ chiamiamo **immagine di** A' l'insieme delle immagini degli elementi di A'. Indichiamo questo insieme con il simbolo $f(A')$. Quindi:

$$f(A') = \{b \in B \mid \exists a' \in A' \text{ tale che } f(a') = b\}$$

Possiamo anche definire la **restrizione** della funzione f a A', che viene indicata con il simbolo $f|_{A'}$ (si dice f **ristretta** ad A'). Essa è la funzione ottenuta considerando la funzione f solo sugli elementi di A'. La funzione $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$ è quindi definita

da $f|_{A'}(a') = f(a')\ \forall a' \in A'$.
Si definisce anche la **funzione inclusione** $i : A' \longrightarrow A$ nel modo seguente $i(a') = a'\ \forall a' \in A'$ △

Definizione 9.3 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva** (o **monomorfismo**) se elementi diversi hanno immagini diverse. Cioè:
f iniettiva $\iff$ ($a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a')$).
O, equivalentemente:
f iniettiva $\iff$ ($f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$). △

Definizione 9.4 Dato un insieme finito A, indichiamo con $|A|$ il numero di elementi di A. △

Esercizio E.9.1 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ iniettiva } \iff \forall b \in B\ |f^{-1}(b)| \leq 1$$

Definizione 9.5 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva** o **surgettiva** o **sopra** (o **epimorfismo**), se si ha $B = f(A)$. △

Esercizio E.9.2 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ surgettiva } \iff \forall b \in B\ |f^{-1}(b)| \geq 1$$

Definizione 9.6 Una funzione si dice **biiettiva** o **biunivoca** se essa è iniettiva e suriettiva. △

Esercizio E.9.3 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ biiettiva } \iff \forall b \in B\ |f^{-1}(b)| = 1$$

Esercizio E.9.4 Sia A l'insieme degli studenti. Consideriamo la funzione $f : A \longrightarrow N \cup \{0\}$ che associa ad ogni studente il numero degli esami del primo anno da lui superati. La funzione f è iniettiva, è surgettiva? Spiegare cosa è $f^{-1}(3)$.

Esercizio E.9.5 Dare un esempio di funzione non iniettiva e non surgettiva.
Dare un esempio di funzione iniettiva e non surgettiva.
Dare un esempio di funzione non iniettiva e surgettiva.
Dare un esempio di funzione iniettiva e surgettiva (cioè biunivoca).

Definizione 9.7 Dato un insieme A la **funzione identica** di A è la funzione $f : A \longrightarrow A$ definita da $f(a) = a\ \forall a \in A$. Di solito la funzione identica di A viene indicata con il simbolo id_A (o con il simbolo id se non vi sono dubbi sull'insieme su cui opera l'identità) o anche con il simbolo 1_A. △

Teorema 9.8 *La funzione identica di un insieme A è biunivoca.*

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Teorema 9.9 *Dati $A' \subset A$, la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è iniettiva.*

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Esercizio E.9.6 Dimostrare che la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è surgettiva se e solo se $A' = A$.

Definizione 9.10 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, esse si dicono **uguali** se si ha:

$$\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$$

Nota 9.11 Dalla definizione precedente segue che date due funzioni
$f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ sono diverse se esiste $a \in A$ tale che $f(a) \neq g(a)$. △

Esercizio E.9.7 Siano date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, e sia $C \subset A$ e $C \neq A$.
Verificare la verità o falsità della seguente affermazione:

$$f|_C = g|_C \Longrightarrow f = g$$

9.3 Composizione di funzioni

Definizione 9.12 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, la **funzione composta** è la funzione $g \circ f : A \longrightarrow C$ definita da

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)] \quad \forall a \in A$$

Definizione 9.13 Data una funzione biunivoca $f : A \longrightarrow B$, la **funzione inversa** di f è la funzione:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

definita da:
$f^{-1}(b) = a \quad$ dove $a \in A$ è tale che $f(a) = b$.

Nota 9.14 Il fatto che la funzione f sia biunivoca assicura che l'elemento a verificante la condizione richiesta esista e sia unico. △

Nota 9.15 Attenzione. Con il simbolo $f^{-1}(b)$ si indica sia la controimmagine di b attraverso una *qualsiasi* funzione f sia l'immagine di b attraverso la funzione f^{-1} inversa di una funzione f che sia *biunivoca*. △

Teorema 9.16 *La funzione inversa f^{-1} di una funzione biunivoca f è essa stessa biunivoca.*

DIMOSTRAZIONE . Lasciata per esercizio. ■

Esercizio E.9.8 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione biunivoca e sia $f^{-1} : B \longrightarrow A$ la sua inversa. Dimostrare che si ha: $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$.