

Giuseppe Accascina

Note del corso di Geometria e Algebra

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2006-2007

Istruzioni per l'uso

Faremo spesso riferimento a ciò che è stato introdotto nel corso di Geometria del primo anno.

Useremo il simbolo [Accascina, Monti] per indicare le dispense *Note del corso di Geometria* di Giuseppe Accascina, Valerio Monti (quando necessario indicheremo anche l'anno del corso).

In queste dispense è contenuto ciò che il docente dice a lezione. Sono suddivise in capitoli. Ciascuno dei capitoli corrisponde in linea di massima a una lezione ed una esercitazione, per un tempo totale di circa due ore.

Alcuni capitoli, purtroppo non tutti, sono organizzati in modo tale da guidare il più possibile lo studente nello studio.

Il primo capitolo è uno di questi. In esso sono intervallati numerosi esercizi (che chiameremo d'ora in poi *esercizi di base*). Consigliamo di non proseguire la lettura senza aver prima risolto l'esercizio di base assegnato. L'esercizio è stato inserito proprio per far comprendere al lettore se ha capito o meno quel che ha letto in precedenza. Inoltre spesso l'esercizio di base viene utilizzato successivamente. Una volta risolto l'esercizio è bene controllarne la risoluzione. Le risoluzioni degli esercizi del capitolo sono scritte nel quartultimo paragrafo del capitolo. Anche la risoluzione dell'esercizio è parte integrante del testo: spesso viene utilizzata successivamente. Nel terzultimo paragrafo di ogni capitolo, che chiamiamo *sunto*, vengono messi in evidenza gli argomenti principali svolti nel capitolo. Consigliamo di leggere con cura anche questo paragrafo. Quando sarà necessario richiamare argomenti studiati nei capitoli precedenti, di norma rimanderemo al sunto.

Non basta aver saputo svolgere un esercizio di un certo tipo per essere sicuri di saper risolvere esercizi dello stesso tipo. Occorre “allenarsi”. Con l'allenamento si acquista sicurezza e velocità. Per questa ragione nel penultimo paragrafo di ogni capitolo, sono stati inseriti un certo numero di esercizi di “allenamento” che chiameremo semplicemente *esercizi*. Consigliamo di svolgere questi esercizi. Nell'ultimo paragrafo del capitolo sono scritte le soluzioni di quasi tutti gli esercizi.

Capitolo 1

Applicazioni dell'algoritmo di Gauss

NOTA. Questo capitolo è stato tratto da *Note del corso di Geometria* per Ingegneria Gestionale, Laurea triennale, scritte da Giuseppe Accascina e Valerio Monti. Questo capitolo viene svolto in minima parte nel corso di Laurea triennale.

1.1 Introduzione

Nel corso di Geometria del primo anno della Laurea triennale abbiamo descritto l'algoritmo di Gauss e abbiamo visto la sua efficacia per la determinazione delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Per mezzo di questo algoritmo si sostituisce un sistema con uno ad esso equivalente avente la matrice dei coefficienti a scalini.

Con l'algoritmo di Gauss possiamo quindi ottenere, a partire da una qualsiasi matrice, una matrice a scalini. Ebbene, quest'ultima matrice ha lo stesso rango della matrice originaria.

Vedremo che è molto semplice calcolare il rango di una matrice a scalini. Tutto ciò ci dà un algoritmo per determinare il rango di una matrice. Esso, per matrici grandi, è molto più efficace dell'algoritmo studiato in precedenza che, come sappiamo, si basa sul calcolo dei determinanti dei minori della matrice.

In particolare possiamo ottenere, con il procedimento di Gauss, a partire da una matrice quadrata, una matrice a scalini. Il determinante di quest'ultima è uguale od opposto al determinante della matrice originaria.

Ricordiamo che una matrice quadrata a scalini è una particolare matrice triangolare e che il determinante di una matrice triangolare uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Tutto ciò ci dà un algoritmo per la determinazione del determinante di una matrice quadrata che è estremamente efficace nel caso in cui l'ordine della matrice sia alto.

Per fare tutto ciò dobbiamo introdurre il concetto di operazione elementare su una matrice. Faremo ciò nel prossimo paragrafo. Nel terzo e quarto paragrafo illustreremo gli algoritmi di Gauss per la determinazione del rango di una qualsiasi matrice e del determinante di una qualsiasi matrice quadrata.

1.2 Operazioni elementari

Nel capitolo 9 di [Accascina, Monti] è descritto l'algoritmo di Gauss. Siamo in grado, per mezzo di esso, di sostituire ad un qualsiasi sistema un altro sistema ad esso equivalente la cui matrice dei coefficienti sia a scalini. Per far ciò abbiamo utilizzato due tipi di operazioni. Il primo consiste nel sommare ad una equazione del sistema un'altra equazione del sistema moltiplicata per un numero reale. Il secondo consiste nello scambiare tra loro due equazioni del sistema. In corrispondenza a ciò la matrice del sistema varia per mezzo di una delle operazioni seguenti:

- Sommare alla riga r -esima della matrice k volte la riga s -esima, con $s \neq r$ e k numero reale.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi due tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**.

Esempio 1.1 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ottenere a partire da questa matrice una matrice a scalini applicando successivamente alcune operazioni elementari di riga secondo l'algoritmo di Gauss. Come prima cosa sommiamo alla terza riga la prima moltiplicata per -2 . Otteniamo la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo tra loro la seconda e la terza riga della matrice A' . Otteniamo la matrice a scalini:

$$A'' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

Esercizio di base EB.1.1 Dimostrare che si può passare dalla matrice A'' alla matrice A per mezzo di operazioni elementari di riga. $\triangle$

Si può generalizzare tutto ciò. Si può dimostrare (lo vedremo tra poco) che, se si può passare da una matrice A ad una matrice A' per mezzo di successive operazioni elementari di riga, allora si può passare dalla matrice A' alla matrice A per mezzo di operazioni elementari di riga. Questo suggerisce la:

Definizione 1.2 Una matrice A si dice **equivalente per riga** ad una matrice A' se è possibile passare da A a A' per mezzo di un numero finito di operazioni elementari di riga. $\triangle$

Proposizione 1.3 La relazione di equivalenza per riga ha le seguenti tre proprietà:

riflessiva: ogni matrice A è equivalente per righe a se stessa;

simmetrica: se A è equivalente per righe a B , allora B è equivalente per righe a A ;

transitiva: se A è equivalente per righe a B e B è equivalente per righe a C , allora A è equivalente per righe a C .

DIMOSTRAZIONE riflessiva. Notiamo che, sommando ad una riga di una matrice un'altra riga moltiplicata per 0, si ottiene la matrice stessa. Pertanto ogni matrice è equivalente per righe a se stessa.

simmetrica. Dimostriamo dapprima ciò nel caso in cui si passa da una matrice A a B per mezzo di una sola operazione elementare di riga. Se l'operazione è il sommare alla riga r -sima la riga s -sima moltiplicata per h , si passa da B a A sommando alla riga r -sima la riga s moltiplicata per $-h$.

Se invece l'operazione è lo scambiare tra loro due righe, si passa da B a A scambiando di nuovo tra loro le stesse righe.

Nel caso in cui si passa da A a B con più di una operazione, si passa da B ad A facendo il procedimento a ritroso. Si parte dall'ultima operazione e via via si arriva alla prima.

transitiva. Segue dalla definizione. $\blacksquare$

Vogliamo ora dare una descrizione differente delle operazioni elementari di riga. Cominciamo con un esempio:

Esempio 1.4 Consideriamo la matrice identica di ordine 2:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo alla prima riga la seconda riga moltiplicata per un numero reale h . Otteniamo la matrice:

$$I_h(1, 2) := \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo utilizzato il simbolo $I_h(1, 2)$ per ricordarci che è ottenuta dalla matrice I sommando alla prima riga la seconda moltiplicata per h . Notiamo che

$$\det I_h(1, 2) = 1.$$

Consideriamo ora una matrice A tale che si possa fare il prodotto

$$I_h(1, 2)A.$$

La matrice A dovrà necessariamente avere due righe. Sia, per esempio, A una generica matrice di tipo $(2, 3)$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il prodotto $I_h(1, 2)A$:

$$A' := I_h(1, 2)A = \begin{pmatrix} a_{11} + ha_{21} & a_{12} + ha_{22} & a_{13} + ha_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

La matrice A' non è altro che la matrice ottenuta dalla matrice A sommando alla prima riga la seconda riga moltiplicata per h .

Quindi, moltiplicando a sinistra una matrice A per la matrice $I_h(1, 2)$ si applica alla matrice A la stessa operazione elementare che si è applicata alla matrice I per ottenere la matrice $I_h(1, 2)$. $\triangle$

Vogliamo ora generalizzare quanto visto.

Notazione 1.5 Sia I la matrice identica di ordine n e sia $I_h(r, s)$, con $r \neq s$, la matrice ottenuta da I sommando alla r -esima riga la s -riga moltiplicata per h . $\triangle$

Osservazione 1.6 Dal momento che $I_h(r, s)$ è una matrice triangolare si può calcolare facilmente il suo determinante:

$$\det I_h(r, s) = 1. \quad \triangle$$

Abbiamo poi la:

Proposizione 1.7 Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A sommando alla r -esima riga di A la s -esima riga di A moltiplicata per h . Allora $A' = I_h(r, s)A$.

DIMOSTRAZIONE Per definizione, la matrice $I_h(r, s)$ è data da:

$$I_h(r, s) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & h & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$I_h(r, s) := (\gamma_{ij}) \quad \text{con } \gamma_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ h & \text{se } i = r, j = s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notiamo che, nella rappresentazione appena fatta della matrice $I_h(r, s)$, abbiamo implicitamente supposto $r < s$. In tal caso $I_h(r, s)$ è triangolare superiore. Se invece si ha $r > s$, essa è triangolare inferiore. In ambedue i casi si ha che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale. Quindi

$$\det I_h(r, s) = 1.$$

Dimostriamo ora che la matrice $A' = I_h(r, s)A$ è uguale alla matrice ottenuta da A sommando alla r -esima riga di A la s -esima riga di A moltiplicata per h . Si ha:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & h & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nq} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il generico elemento c_{ij} della matrice A' . Si ha:

$$c_{ij} = \gamma_{i1}a_{1j} + \dots + \gamma_{ii}a_{ij} + \dots + \gamma_{in}a_{nj}.$$

Notando come sono gli elementi γ_{ik} , distinguiamo due casi: $i \neq r$ e $i = r$. Per $i \neq r$ abbiamo, per ogni j :

$$c_{ij} = \underbrace{\gamma_{i1}}_{=0} a_{1j} + \dots + \underbrace{\gamma_{ii}}_{=1} a_{ij} + \dots + \underbrace{\gamma_{in}}_{=0} a_{nj} = a_{ij}.$$

Dunque gli elementi di A' sulle righe diverse dalla r -esima coincidono con i corrispondenti elementi di A .

Per $i = r$ abbiamo, per ogni j :

$$c_{rj} = \underbrace{\gamma_{r1}}_{=0} a_{1j} + \dots + \underbrace{\gamma_{rr}}_{=1} a_{rj} + \dots + \underbrace{\gamma_{rs}}_{=h} a_{sj} + \dots + \underbrace{\gamma_{rn}}_{=0} a_{nj} = a_{rj} + ha_{sj}.$$

Dunque un elemento di A' sulla riga r -esima è uguale alla somma dell'elemento di A nella stessa posizione e di h volte l'elemento di A che sta sulla riga s -esima e nella medesima colonna. In altri termini la riga r -esima di A' è uguale alla somma della riga r -esima di A e di h volte la riga s -esima di A , come volevamo. ■

Vogliamo ora analizzare più in dettaglio l'operazione elementare di scambio di due righe. Cominciamo con un esempio:

Esempio 1.8 Prendiamo la matrice identica di ordine 3:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiamo tra loro le ultime due righe. Otteniamo:

$$I(2, 3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo usato il simbolo $I(2, 3)$ per ricordarci che abbiamo scambiato tra loro la seconda e terza riga.

Notiamo che:

$$\det I(2, 3) = -1.$$

Consideriamo ora una generica matrice A di tipo $(3, 2)$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

moltiplicandola a sinistra per la matrice $I(2, 3)$ otteniamo:

$$A' := I(2, 3)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice A' è quindi ottenuta dalla matrice A scambiando tra loro la seconda e terza riga.

Quindi, moltiplicando a sinistra una matrice A per la matrice $I(2, 3)$ si applica alla matrice A la stessa operazione elementare che si è applicata alla matrice I per ottenere la matrice $I(2, 3)$. $\triangle$

Anche in questo caso si generalizza tutto ciò.

Notazione 1.9 Sia I la matrice identica di ordine n e sia $I(r, s)$, con $r \neq s$, la matrice ottenuta da I scambiando la riga r -esima riga con la s -riga. $\triangle$

Si potrebbe facilmente dimostrare (noi non lo faremo) che vale la

Osservazione 1.10 Il determinante di $I(r, s)$ è uguale a -1 . $\triangle$

Abbiamo poi la

Proposizione 1.11 Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A scambiando tra loro le righe r -esima e s -esima. Allora $A' = I(r, s)A$.

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione della proposizione precedente è analoga alla dimostrazione scritta della proposizione 1.7. Viene quindi lasciata per esercizio. ■

In definitiva abbiamo visto che, se una matrice A' è ottenuta da una matrice A per mezzo di un'operazione elementare di riga, allora si ha

$$A' = KA$$

dove K è una matrice del tipo $I_h(r, s)$ oppure del tipo $I(r, s)$ a seconda se l'operazione elementare che abbiamo applicato è la somma ad una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore oppure uno scambio di righe.

Abbiamo pertanto la

Proposizione 1.12 *Se la matrice A è equivalente per righe alla matrice A' allora si ha*

$$A' = KA$$

essendo $K := K_m K_{m-1} \dots K_2 K_1$ e le matrici $K_1, K_2, \dots, K_m$ sono del tipo $I_h(r, s)$ o del tipo $I(r, s)$.

Inoltre la matrice K ha determinante uguale a 1 o a -1 .

DIMOSTRAZIONE L'ultima affermazione sul determinante della matrice K deriva dal fatto che ciascuna delle matrici K_i ha determinante uguale a 1 o a -1 e dal teorema di Binet.

Ricordiamo che il teorema di Binet dice che si ha:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Esempio 1.13 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se sommiamo alla terza riga la seconda riga moltiplicata per -2 otteniamo la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha $A' = I_{-2}(3, 2)A$. Ora scambiamo la prima e seconda riga di A' :

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora $A'' = I(1, 2)A'$. Pertanto $A'' = I(1, 2)I_{-2}(3, 2)A = KA$, dove K è la matrice:

$$K := I(1, 2)I_{-2}(3, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

Esercizio di base EB.1.2 Sia A una matrice equivalente per righe a B . Allora $B = KA$, con K prodotto di matrici del tipo $I_h(r, s)$ e $I(r, s)$. Sappiamo che allora si ha che B è equivalente per righe alla matrice A e quindi $A = HB$ con H prodotto di matrici del tipo $I_h(r, s)$ e $I(r, s)$. Determinare i fattori della matrice H . $\triangle$

Supponiamo ora di avere due matrici quadrate A e A' equivalenti per riga. Dunque sappiamo che $A' = KA$ dove K è il prodotto di un numero finito di matrici elementari. Poiché abbiamo già osservato che la matrice K ha determinante 1 o -1 , dal teorema di Binet possiamo affermare che $\det A' = \det A$ o $\det A' = -\det A$. Più precisamente:

Proposizione 1.14 *Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, consideriamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A' : tra queste ci saranno un certo numero di operazioni di somma ad una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore e un certo numero m di operazioni di scambio di righe. Si ha allora:*

$$\det A' = (-1)^m \det A.$$

Esercizio di base EB.1.3 Dimostrare la proposizione 1.14. $\triangle$

Un caso particolarmente interessante è quello in cui si ha una matrice quadrata A con una riga (diciamo la r -esima) uguale a k volte un'altra riga (diciamo la s -esima). Allora, sommando alla r -esima riga di A la s -esima moltiplicata per $-k$, otteniamo una matrice A' la cui r -esima riga è nulla, e, dunque A' ha determinante nullo. Poiché $\det A = \det A'$, abbiamo $\det A = 0$.

Sfruttando il fatto che il determinante di una matrice e della sua trasposta sono uguali si può anche dimostrare una proprietà analoga per le colonne. Abbiamo dunque la:

Proposizione 1.15 *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Se una riga di A è multipla di un'altra riga di A allora $\det A = 0$ (in particolare se A ha due righe uguali abbiamo che $\det A = 0$);*
2. *Se una colonna di A è multipla di un'altra colonna di A allora $\det A = 0$ (in particolare se A ha due colonne uguali abbiamo che $\det A = 0$).*

Esempio 1.16 Si consideri la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 8 & 4 & 0 \\ 12 & -24 & 13 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & -12 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la quarta riga di A è $-\frac{3}{2}$ la seconda. Dunque $\det A = 0$. $\triangle$

Una interessante conseguenza della proposizione 1.14 è data dal:

Teorema 1.17 *Se A e A' sono matrici (non necessariamente quadrate) equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:*

$$\text{rk } A' = \text{rk } A.$$

Non dimostriamo ciò. Facciamo solamente notare che questa proprietà deriva essenzialmente dal fatto che, nel calcolare il rango di una matrice, interessa vedere solamente se i determinanti dei minori sono uguali a 0 o diversi da 0 ed abbiamo visto che i determinanti di matrici quadrate equivalenti per riga differiscono al più per il segno.

1.3 Calcolo del rango

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che matrici equivalenti per riga hanno lo stesso rango. Quindi, se dobbiamo calcolare il rango di una matrice possiamo considerare una matrice ad essa equivalente per righe e sperare che il calcolo del rango di questa nuova matrice sia facile. In particolare, sappiamo che con il metodo di Gauss è possibile, data una matrice A , determinare una matrice a scalini equivalente per righe alla matrice A . Ci chiediamo se questo ci aiuta, cioè se sia facile determinare il rango di una matrice a scalini. Consideriamo allora qualche esempio:

Esempio 1.18 Consideriamo la matrice a scalini:

$$A := \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

La matrice A ha 3 scalini. Consideriamo ora il minore di A formato dalle righe non nulle di A e dalle tre colonne contenenti gli scalini:

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Questo minore è una matrice triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale ed è quindi diverso da 0. Pertanto A ha rango almeno 3. D'altra parte ogni minore di A di ordine 4 deve avere una riga tutta di 0 ed ha pertanto determinante nullo. Dunque $\text{rk } A = 3$, cioè il rango di A è uguale al numero degli scalini. $\triangle$

Quanto visto nell'esempio 1.18 non è un caso. Utilizzando lo stesso approccio si può dimostrare facilmente (anche se noi non lo daremo in dettaglio) che vale la:

Proposizione 1.19 *Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero degli scalini (cioè il numero di righe non nulle) della matrice.*

Tutto ciò ci suggerisce un algoritmo per il calcolo del rango di una matrice.

Algoritmo 1.20 (di Gauss per il calcolo del rango) Data una matrice A , ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A .
2. Contiamo il numero di scalini di A' . Siano n . Si ha allora:

$$\text{rk } A = \text{rk } A' = n. \quad \triangle$$

Esempio 1.21 Calcoliamo il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si lascia come esercizio di verificare che la seguente matrice a scalini A' è equivalente alla matrice A .

$$A' := \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice A' ha 3 scalini. Quindi $\text{rk } A = 3$. $\triangle$

Esempio 1.22 Vogliamo determinare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cominciamo con il sommare alla terza riga la prima e alla quarta riga -2 volte la prima:

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ora sommiamo alla terza riga della matrice A' 2 volte la seconda riga di A' e alla quarta riga -1 volte la seconda riga di A' :

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infine scambiamo tra loro la terza e quarta riga della matrice A'' ottenendo una matrice a scalini:

$$A''' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice così ottenuta ha 3 scalini ad ha, quindi, rango 3. Pertanto anche la matrice A ha rango 3. $\triangle$

1.4 Calcolo del determinante

Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, dalla proposizione 1.14 sappiamo che:

$$\det A' = (-1)^m \det A$$

dove m è il numero di scambi di riga effettuati per passare dalla matrice A alla matrice A' (ovviamente oltre agli scambi di riga, per passare dalla matrice A alla matrice A' può essere stato necessario effettuare più volte operazioni di somme di un multiplo di una riga ad un'altra riga ma queste non influenzano il segno del determinante).

Dunque se per passare da A ad A' è stato necessario effettuare un numero pari di scambi, la matrice A e A' hanno lo stesso determinante, altrimenti hanno determinante opposto. In entrambi i casi possiamo dedurre il determinante di A dal determinante di A' .

Utilizzando il metodo di Gauss possiamo ottenere da una matrice quadrata A una matrice quadrata a scalini ad essa equivalente per righe. È facile vedere che una matrice quadrata a scalini è triangolare superiore e, quindi, il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Tutto ciò ci suggerisce un algoritmo per il calcolo del determinante di una matrice quadrata.

Algoritmo 1.23 (di Gauss per il calcolo del determinante) Data una matrice quadrata A , ne calcoliamo il determinante nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A , e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.

2. Calcoliamo il determinante di A' semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale. Notiamo che A' ha determinante 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.

3. Si ha quindi:

$$\det A = (-1)^m \det A'. \quad \triangle$$

Esempio 1.24 Calcoliamo il determinante della matrice A :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo visto in 1.21 che la matrice A è equivalente alla seguente matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A' è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale ed è, dunque, uguale a 1. Per passare da A ad A' non occorre fare alcun scambio di righe: il determinante di A è allora uguale al determinante di A' cioè:

$$\det A = \det A' = 1. \quad \triangle$$

Esempio 1.25 Calcoliamo il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo una matrice a scalini ad essa equivalente. Scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo alla quarta riga la seconda:

$$A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini, equivalente per righe alla matrice A . La matrice A' ha determinante uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale

principale, cioè 5. Per passare da A ad A' abbiamo operato un numero dispari di scambi di riga (cioè uno solo): il determinante di A è allora uguale all'opposto del determinante di A' cioè:

$$\det A = -\det A' = -5. \quad \triangle$$

Esempio 1.26 Vogliamo calcolare il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Scambiamo la quarta riga con la prima:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo alla quarta riga la seconda:

$$A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto è inutile proseguire: anche se la matrice che abbiamo ottenuto non è a scalini (dovremmo fare un ulteriore passaggio) è comunque una matrice triangolare. Il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Poiché uno fra essi è 0, il determinante di A' è 0. Pertanto anche A ha determinante 0: infatti il determinante di A è uguale oppure opposto al determinante di A' . In questo caso non ci interessa quindi contare il numero di scambi utilizzati per passare da A ad A' . $\triangle$

1.5 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.1 Per ottenere la matrice A dalla matrice A' per mezzo di operazioni elementari di riga, facciamo il procedimento a ritroso. Scambiamo tra loro la seconda e la terza riga di A' . Sommiamo poi alla terza riga la prima riga moltiplicata per 2.

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.2 Sia $B = K_m K_{m-1} \dots K_1 A$.

Si ha ovviamente $A = K_1^{-1} \dots K_{m-1}^{-1} K_m^{-1} B$.

Abbiamo poi $I_h(r, s)^{-1} = I_{-h}(r, s)$ e $I(r, s)^{-1} = I(r, s)$.

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.3 Si ha:

$$A' = K_n K_{n-1} \dots K_2 K_1 A.$$

Dalle condizioni poste, sappiamo che m delle matrici $K_n, \dots, K_1$ hanno determinante uguale a -1 mentre le altre hanno determinante uguale a 1 . Applicando il teorema di Binet si ha quindi la tesi.

1.6 Sunto

1.6.1 Operazioni elementari

Definizione Due matrici A e A' si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da una all'altra per mezzo di successive operazioni del tipo:

- Sommare alla riga r -esima della matrice k volte la riga s -esima, con $s \neq r$ e k numero reale.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi due tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**. $\triangle$

Proposizione Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A sommando alla r -esima riga di A la s -esima riga di A moltiplicata per h . Allora $A' = I_h(r, s)A$, dove $I_h(r, s)$ è la matrice ottenuta dalla matrice identica I di ordine n sommando alla r -esima riga la s -esima riga moltiplicata per h .

Proposizione Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A scambiando tra loro le righe r -esima e s -esima. Allora $A' := I(r, s)A$, dove $I(r, s)$ è la matrice ottenuta dalla matrice identica di ordine n scambiando tra loro le righe r -esima e s -esima.

Proposizione Se A e A' sono matrici equivalenti per riga, allora si ha:

$$A' = KA$$

dove K è una matrice prodotto di matrici del tipo $I_h(r, s)$ e del tipo $I(r, s)$.

Teorema Se A e A' sono matrici equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:

$$\text{rk } A' = \text{rk } A.$$

Proposizione *Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, consideriamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A' : tra queste ci saranno un certo numero di operazioni di somma ad una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore e un certo numero m di operazioni di scambio di righe. Si ha allora:*

$$\det A' = (-1)^m \det A.$$

Proposizione *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Se una riga di A è multipla di un'altra riga di A allora $\det A = 0$ (in particolare se A ha due righe uguali abbiamo che $\det A = 0$);*
2. *Se una colonna di A è multipla di un'altra colonna di A allora $\det A = 0$ (in particolare se A ha due colonne uguali abbiamo che $\det A = 0$).*

1.6.2 Algoritmo per il calcolo del rango di una matrice

Algoritmo (di Gauss per il calcolo del rango) Data una matrice A , ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A .
2. Contiamo il numero di scalini di A' . Siano n . Si ha allora:

$$\text{rk } A = \text{rk } A' = n. \quad \triangle$$

1.6.3 Algoritmo per il calcolo del determinante di una matrice

Algoritmo (di Gauss per il calcolo del determinante) Data una matrice quadrata A , ne calcoliamo il determinante nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A , e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.
2. Calcoliamo il determinante di A' semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale. Notiamo che A' ha determinante 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.
3. Si ha quindi:

$$\det A = (-1)^m \det A'. \quad \triangle$$

1.7 Esercizi

Esercizio E.1.1 Verificare che la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è equivalente per righe alla matrice I .

Esercizio E.1.2 Determinare una matrice a scalini B equivalente per righe alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

e determinare una matrice K tale che:

$$B = KA.$$

Esercizio E.1.3 Determinare una matrice a scalini B equivalente per righe alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

e determinare una matrice K tale che:

$$B = KA.$$

Esercizio E.1.4 Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.5 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ -9 & -16 & 4 & -10 & 22 \\ 9 & 24 & -6 & 15 & -33 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.6 Calcolare, con l'algoritmo di Gauss, il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.7 Calcolare, con l'algoritmo di Gauss, il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.8

Si considerino le matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calcolare il rango di A e il rango di B utilizzando l'algoritmo di Gauss.

1.8 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.1.1 È sufficiente scambiare la prima e la terza riga.

Soluzione dell'esercizio E.1.2 Innanzitutto sommiamo alla terza riga di A la prima riga moltiplicata per -4 e otteniamo così la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $A' := I_{-4}(3, 1)A$. Ora scambiamo la seconda e terza riga di A' ed otteniamo la matrice a scalini:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $B = I(2, 3)A'$ e, dunque, $B = I(2, 3)I_{-4}(3, 1)A$. Se poniamo allora $K := I(2, 3)I_{-4}(3, 1)$, abbiamo che $B = KA$. Calcoliamo esplicitamente la matrice K :

$$K = I(2, 3)I_{-4}(3, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio E.1.3 Innanzitutto sommiamo alla seconda riga di A la prima riga moltiplicata per -2 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per -4 e otteniamo così la matrice a scalini:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $B := I_{-4}(3, 1) I_{-2}(2, 1) A$. Se poniamo $K := I_{-4}(3, 1) I_{-2}(2, 1)$ abbiamo che $A' = KA$. Calcoliamo esplicitamente la matrice K :

$$K = I_{-4}(3, 1) I_{-2}(2, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio E.1.4 La seconda riga di A è uguale a 2 volte la prima. Quindi A ha determinante 0.

La seconda colonna di B è uguale a 2 volte la terza. Quindi B ha determinante 0.

Sommiamo alla seconda riga di C la prima riga moltiplicata per -1 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per $-\frac{3}{2}$ e otteniamo così la matrice:

$$C' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo la seconda riga e la terza ed otteniamo la matrice a scalini:

$$C'' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di C'' è uguale a -8 . Per passare da C a C'' abbiamo operato un numero dispari di scambi e, pertanto $\det C = -\det C'' = 8$.

Soluzione dell'esercizio E.1.5 Sommiamo alla seconda riga di A la prima riga moltiplicata per 3 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per -3 e otteniamo così la matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A' ha due scalini abbiamo che $\text{rk } A = \text{rk } A' = 2$.

Soluzione dell'esercizio E.1.6 Sommiamo alla seconda riga di A la prima moltiplicata per $-\frac{3}{2}$, alla terza la prima moltiplicata per 2 e alla quarta la prima moltiplicata per -4 :

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora sommiamo alla terza riga di A' la seconda moltiplicata per -8 :

$$A'' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine sommiamo alla quarta riga di A'' la terza moltiplicata per $-\frac{2}{25}$ ed otteniamo la matrice a scalini:

$$A''' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{25} \end{pmatrix}.$$

La matrice così ottenuta ha 4 scalini e, dunque, $\text{rk } A = \text{rk } A''' = 4$.

Soluzione dell'esercizio E.1.7 Tramite le seguenti operazioni: scambio della prima e seconda riga, somma alla quarta riga -1 volte la prima, somma alla terza riga -1 volte la seconda, somma alla quarta riga $\frac{3}{2}$ volte la seconda, somma alla quarta riga $\frac{1}{2}$ volte la terza otteniamo la matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché A' ha 4 scalini, abbiamo che $\text{rk } A = \text{rk } A' = 4$.

Soluzione dell'esercizio E.1.8 Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo alla seconda riga -3 volte la prima, alla terza riga -4 volte la prima, alla quarta riga -1 volte la prima e alla quinta riga 2 volte la prima. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora alla terza riga -1 volte la seconda, alla quarta riga $-\frac{1}{3}$ volte la seconda e alla quinta riga $\frac{2}{3}$ volte la seconda. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo di posto la terza e quarta riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e infine sommiamo alla quinta riga -1 volte la terza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque una matrice a scalini con tre righe non nulle. Il rango di A è dunque 3.

Consideriamo ora la matrice:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sommiamo alla seconda riga -2 volte la prima, alla terza riga -1 volte la prima, alla quarta riga -1 volte la prima e alla quinta riga 1 volte la prima. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora alla quarta riga $-\frac{1}{2}$ volte la seconda e alla quinta riga $\frac{1}{2}$ volte la seconda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Scambiamo ora terza e quarta riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

e infine sommiamo alla quinta riga -1 volte la terza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbiamo dunque una matrice a scalini con tre righe non nulle. Il rango di B è pertanto uguale a 3.

Capitolo 2

Campi

2.1 Introduzione

Studiamo ora i campi. Essi sono una generalizzazione dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con le operazioni di addizione e di moltiplicazione.

Nel secondo paragrafo ricordiamo le proprietà delle operazioni di addizione e di moltiplicazione tra numeri reali. Ricordiamo solamente quelle proprietà che sono state utilizzate nel corso di geometria per studiare i sistemi di equazioni lineari a coefficienti reali.

Nel terzo paragrafo diamo la definizione di campo e ne studiamo alcune proprietà.

Nel quarto paragrafo vediamo come tutta la teoria dei sistemi lineari si estenda ai sistemi di equazioni lineari i cui coefficienti, anziché appartenere a $\mathbb{R}$, appartengano a un campo qualsiasi.

2.2 Addizione e moltiplicazione sui reali

Riassumiamo le proprietà dei numeri reali da noi utilizzate nel corso di Geometria.

Dati due numeri reali a e b , noi sappiamo cosa sia la loro somma $a + b$ e il loro prodotto $a \cdot b$. Sono quindi definite in $\mathbb{R}$ due operazioni, l'addizione e la moltiplicazione, che associano ad ogni coppia di numeri reali a e b i numeri reali $a + b$ e $a \cdot b$ rispettivamente.

Le operazioni di addizione e moltiplicazione verificano le seguenti proprietà:

1. Proprietà associativa dell'addizione:

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ per ogni } a, b \text{ e } c \text{ in } \mathbb{R}.$$

2. Proprietà commutativa dell'addizione:

$$a + b = b + a \text{ per ogni } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{R}.$$

3. **Esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione:** esiste un elemento e tale che

$$a + e = a \text{ per ogni } a \text{ in } \mathbb{R}.$$

Ovviamente esiste un unico elemento che soddisfa questa proprietà: il numero 0.

4. **Esistenza dell'opposto:** per ogni elemento a di $\mathbb{R}$ esiste un elemento b in $\mathbb{R}$ tale che

$$a + b = 0.$$

Ovviamente per ogni numero a esiste un unico elemento b che soddisfa questa proprietà: il numero $-a$ detto **opposto** di a .

5. **Proprietà associativa della moltiplicazione:**

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \text{ per ogni } a, b \text{ e } c \text{ in } \mathbb{R}.$$

6. **Proprietà commutativa della moltiplicazione:**

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ per ogni } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{R}.$$

7. **Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione:** esiste un elemento e' tale che

$$a \cdot e' = a \text{ per ogni } a \text{ in } \mathbb{R}.$$

Ovviamente esiste un unico elemento che soddisfa questa proprietà: il numero 1.

8. **Esistenza dell'inverso:** per ogni elemento a di $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} - \{0\}$ esiste un elemento b in $\mathbb{R}$ tale che

$$a \cdot b = 1.$$

Ovviamente per ogni numero non nullo a esiste un unico elemento b che soddisfa questa proprietà: il numero a^{-1} detto **inverso** di a .

9. **Proprietà distributiva:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ per ogni } a, b \text{ e } c \text{ in } \mathbb{R}.$$

Notiamo che nella proprietà 8 abbiamo posto la condizione $a \neq 0$ per l'esistenza dell'inverso di a : qualunque sia b si ha infatti $0 \cdot b = 0 \neq 1$, e, dunque, il numero 0 non ha inverso.

2.3 Definizione di campo

Vogliamo ora studiare insiemi dotati di due operazioni che verifichino le nove proprietà elencate nel paragrafo precedente.

Definizione 2.1 Un campo è un insieme (non vuoto) $\mathbb{K}$ dotato di due **operazioni** che indichiamo con $+$ e $\cdot$ e chiamiamo rispettivamente **addizione** e **moltiplicazione**. Sono cioè date due leggi che associano ad ogni coppia di elementi a e b di $\mathbb{K}$ due elementi di $\mathbb{K}$ che denotiamo con $a + b$ e $a \cdot b$. Non basta però che siano definite due operazioni per poter dire che K è un campo. Tali operazioni devono verificare le seguenti proprietà:

1. **Proprietà associativa dell'addizione:**

$$(a + b) + c = a + (b + c) \text{ per ogni } a, b \text{ e } c \text{ in } \mathbb{K}.$$

2. **Proprietà commutativa dell'addizione:**

$$a + b = b + a \text{ per ogni } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{K}.$$

3. **Esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione:** esiste un elemento e tale che

$$a + e = a \text{ per ogni } a \text{ in } \mathbb{K}.$$

Dimostreremo (vedi proposizione 2.2) che di tali elementi ne esiste uno solo. Chiamiamo questo elemento **zero** e lo indichiamo con il simbolo 0 . Per questo motivo questa proprietà viene spesso chiamata **esistenza dello zero**.

4. **Esistenza dell'opposto:** per ogni elemento a di $\mathbb{K}$ esiste un elemento b in $\mathbb{K}$ tale che

$$a + b = 0.$$

Dimostreremo (vedi proposizione 2.3) che per ogni elemento a di $\mathbb{K}$ esiste un unico elemento b che soddisfa questa proprietà: chiamiamo tale elemento **opposto** di a e lo indichiamo con il simbolo $-a$.

5. **Proprietà associativa della moltiplicazione:**

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \text{ per ogni } a, b \text{ e } c \text{ in } \mathbb{K}.$$

6. **Proprietà commutativa della moltiplicazione:**

$$a \cdot b = b \cdot a \text{ per ogni } a \text{ e } b \text{ in } \mathbb{K}.$$

7. **Esistenza dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione:** esiste un elemento e' tale che

$$a \cdot e' = a \text{ per ogni } a \text{ in } \mathbb{K}.$$

Dimostreremo (vedi proposizione 2.2) che di tali elementi ne esiste uno solo. Chiamiamo questo elemento **uno** o **unità** e lo indichiamo con il simbolo 1. Per questo motivo questa proprietà viene spesso chiamata **esistenza dell'unità**.

8. **Esistenza dell'inverso:** per ogni elemento a di $\mathbb{K}^* := \mathbb{K} - \{0\}$ esiste un elemento b in $\mathbb{K}$ tale che

$$a \cdot b = 1.$$

Dimostreremo (vedi proposizione 2.3) che per ogni elemento a di $\mathbb{K}^*$ esiste un unico elemento b che soddisfa questa proprietà: chiamiamo tale elemento **inverso** di a e lo indichiamo con il simbolo a^{-1} .

9. **Proprietà distributiva:**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ per ogni } a, b \text{ e } c \text{ in } \mathbb{K}. \quad \triangle$$

Proposizione 2.2 *In un campo esiste un solo elemento neutro rispetto all'addizione e un solo elemento neutro rispetto alla moltiplicazione.*

DIMOSTRAZIONE Siano e e $\bar{e}$ due elementi neutri rispetto all'addizione. Pertanto, per ogni elemento A del campo $\mathbb{K}$ si ha:

$$\text{i) } a + e = e + a = a$$

$$\text{ii) } a + \bar{e} = \bar{e} + a = a.$$

Consideriamo ora $e + \bar{e}$.

Sfruttando la i) abbiamo $e + \bar{e} = \bar{e}$

Sfruttando la ii) abbiamo $e + \bar{e} = e$

Dalle due uguaglianze otteniamo $e = \bar{e}$.

In modo analogo si dimostra l'unicità dell'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione. ■

Proposizione 2.3 *In un campo $\mathbb{K}$:*

1. *ogni elemento è dotato di uno ed un solo opposto*
2. *ogni elemento non nullo è dotato di uno e un solo inverso.*

DIMOSTRAZIONE 1. Fissato un elemento a del campo $\mathbb{K}$ siano b e b' due suoi elementi opposti. Si ha pertanto:

$$\text{i) } a + b = b + a = 0$$

$$\text{ii) } a + b' = b' + a = 0.$$

Consideriamo ora $b + a + b'$.

Abbiamo, applicando i):

$$b + a + b' = (b + a) + b' = 0 + b' = b'.$$

Abbiamo, applicando ii):

$$b + a + b' = b + (a + b') = b + 0 = b.$$

Dalle due uguaglianze segue $b = b'$.

2. L'unicità dell'inverso si dimostra in modo analogo. ■

Osservazione 2.4 Nello scrivere la proprietà associativa e la proprietà distributiva abbiamo utilizzato regole per la precedenza tra operazioni del tutto analoghe a quelle che siamo abituati a utilizzare per le operazioni tra reali. Per esempio quando scriviamo $a + (b + c)$ intendiamo dire che prima calcoliamo la somma $b + c$ e poi calcoliamo la somma tra a e $b + c$. Quando invece scriviamo $a \cdot b + a \cdot c$ intendiamo dire che prima calcoliamo i prodotti $a \cdot b$ e $a \cdot c$ e poi sommiamo i risultati così ottenuti. $\triangle$

Osservazione 2.5 La proprietà associativa dell'addizione ci permette di dire che sommando a alla somma $b + c$ o sommando $a + b$ a c otteniamo lo stesso risultato. D'ora in poi possiamo quindi usare il simbolo $a + b + c$ senza problemi: la proprietà associativa ci garantisce che comunque operiamo il risultato è sempre lo stesso. Per la stessa ragione possiamo scrivere la somma di più di tre elementi senza far uso di parentesi (possiamo ad esempio scrivere $a + b + c + d$). Analogamente la proprietà associativa della moltiplicazione ci permette di scrivere il prodotto di tre o più elementi senza far uso di parentesi (possiamo ad esempio scrivere $a \cdot b \cdot c$ o $a \cdot b \cdot c \cdot d$). $\triangle$

2.4 Proprietà dei campi

Definizione 2.6 In un campo $\mathbb{K}$ possiamo introdurre l'operazione di **sottrazione** nel modo seguente: dati a e b in $\mathbb{K}$ poniamo

$$a - b := a + (-b). \quad \triangle$$

Osservazione 2.7 Per definire questa operazione abbiamo dovuto utilizzare la proprietà dell'esistenza dell'opposto. Abbiamo inoltre utilizzato l'operazione di addizione. Notiamo che l'operazione di sottrazione non è, salvo che per alcuni campi molto particolari, né commutativa né associativa. $\triangle$

Esercizio di base EB.2.1 Mostrare con opportuni esempi che l'operazione di sottrazione in $\mathbb{R}$ non è commutativa né associativa. $\triangle$

Diamo ora altre proprietà di un campo $\mathbb{K}$ analoghe a proprietà dei numeri reali. Per ognuna di esse diamo la dimostrazione lasciando come esercizio al lettore il compito di individuare quali proprietà di un campo siano state utilizzate a ogni passaggio.

Proposizione 2.8 *Proprietà di semplificazione rispetto all'addizione.* Siano a, b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$. Allora

$$a = b \text{ se e solo se } a + c = b + c.$$

DIMOSTRAZIONE Se $a = b$ ovviamente risulta $a + c = b + c$. Dimostriamo il viceversa: supponiamo che $a + c = b + c$. Allora $(a + c) + (-c) = (b + c) + (-c)$. Da questa segue che $a + (c + (-c)) = b + (c + (-c))$. Dunque $a + 0 = b + 0$ e pertanto $a = b$. ■

Osservazione 2.9 La proprietà di semplificazione rispetto all'addizione, applicata al caso particolare in cui $b = 0$ ci permette di affermare che, dati due elementi a e c di un campo $\mathbb{K}$, allora si ha $a + c = c$ se e solo se $a = 0$. △

Proposizione 2.10 Per ogni elemento a in $\mathbb{K}$ si ha $a \cdot 0 = 0$.

DIMOSTRAZIONE Poiché $0 = 0 + 0$, si ha $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0)$, da cui otteniamo $a \cdot 0 = a \cdot 0 + a \cdot 0$. La proprietà di semplificazione dell'addizione dà quindi $0 = a \cdot 0$. ■

Osservazione 2.11 Come conseguenza di questa proprietà si ha che, se $\mathbb{K}$ ha almeno due elementi, l'elemento neutro rispetto all'addizione e alla moltiplicazione non possono coincidere vale a dire $1 \neq 0$ (questo può sembrare banale ma si ricordi che 0 e 1 non sono, in generale, il numero 0 e il numero 1). Infatti, scegliamo un elemento a di $\mathbb{K}$ diverso da 0 (per assicurare l'esistenza di un tale elemento utilizziamo il fatto che in $\mathbb{K}$ ci siano almeno due elementi). Ora $a \cdot 1 = a$ e $a \cdot 0 = 0$: poiché $a \neq 0$ abbiamo quindi $a \cdot 1 \neq a \cdot 0$, mentre se fosse $1 = 0$ dovremmo allora avere $a \cdot 1 = a \cdot 0$.

Per evitarci complicazioni d'ora in poi supporremo sempre che un campo $\mathbb{K}$ abbia almeno due elementi (d'altra parte un campo con un solo elemento non è particolarmente interessante!) △

Osservazione 2.12 Nella proprietà 8 abbiamo richiesto l'esistenza dell'inverso solo per elementi diversi da 0: infatti non è possibile che lo 0 abbia inverso dal momento che $0 \cdot a = 0$ per ogni $a \in \mathbb{K}$. △

Per il prodotti che coinvolgono opposti di elementi del campo $\mathbb{K}$ valgono analoghe proprietà a quelle note per le operazioni tra reali. Più precisamente:

Proposizione 2.13 Se a e b sono elementi di un campo $\mathbb{K}$ allora si ha

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

La prima proprietà ci permette allora di scrivere senza ambiguità $-a \cdot b$, per indicare l'elemento $(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.2.2 Dimostrare queste due proprietà. Suggerimento: sommare $(-a) \cdot b$ a $a \cdot b$ e utilizzare la proprietà distributiva. △

Proposizione 2.14 Proprietà di semplificazione rispetto alla moltiplicazione. Siano a , b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$, con $c \neq 0$. Allora

$$a = b \text{ se e solo se } a \cdot c = b \cdot c.$$

DIMOSTRAZIONE Se $a = b$ ovviamente risulta $a \cdot c = b \cdot c$. Dimostriamo il viceversa: supponiamo che $a \cdot c = b \cdot c$. Allora $(a \cdot c) \cdot c^{-1} = (b \cdot c) \cdot c^{-1}$. Da questa segue che $a \cdot (c \cdot c^{-1}) = b \cdot (c \cdot c^{-1})$. Dunque $a \cdot 1 = b \cdot 1$ e pertanto $a = b$. ■

Osservazione 2.15 Chiaramente questa proprietà è falsa se $c = 0$. Scelti infatti a e b diversi tra loro si ha $a \cdot 0 = b \cdot 0 = 0$. Δ

Osservazione 2.16 La proprietà di semplificazione rispetto alla moltiplicazione, applicata al caso particolare in cui $b = 1$ ci permette di affermare che, dati due elementi a e c di un campo $\mathbb{K}$, con $c \neq 0$, allora si ha $a \cdot c = c$ se e solo se $a = 1$. Δ

Un'altra importante conseguenza della proprietà di semplificazione rispetto al prodotto è la seguente:

Proposizione 2.17 Principio dell'annullamento del prodotto. *Se a e b sono due elementi di un campo $\mathbb{K}$ tali che $a \cdot b = 0$ allora almeno uno tra a e b è uguale a 0.*

DIMOSTRAZIONE Abbiamo che $a \cdot b = a \cdot 0$. Allora o $a = 0$, oppure si può semplificare l'uguaglianza precedente e ottenere $b = 0$. ■

Si hanno poi le seguenti proprietà la cui dimostrazione è lasciata per esercizio:

Proposizione 2.18 • *Siano a , b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$: si ha che $a + b = c$ se e solo se $a = c - b$.*

• *Siano a , b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$ con $b \neq 0$: si ha che $a \cdot b = c$ se e solo se $a = c \cdot b^{-1}$.*

Esercizio di base EB.2.3 Dimostrare queste due proprietà. Δ

Applicando queste due proprietà si dimostra facilmente la seguente:

Proposizione 2.19 *Siano a , b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$ con $a \neq 0$. L'equazione nell'incognita x :*

$$a \cdot x + b = c$$

ha un'unica soluzione data da:

$$x = (c - b) \cdot a^{-1}.$$

La dimostrazione è lasciata per esercizio.

Esempi

1. L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione è un campo.
2. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione è un campo.

3. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione è un campo.
4. L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione non è un campo: infatti esso soddisfa tutte le proprietà tranne quella dell'esistenza dell'inverso.
5. L'insieme $M(\mathbb{R}, n, n)$ delle matrici quadrate reali di ordine n (con $n \geq 2$) con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione riga per colonna non è un campo: infatti esso soddisfa tutte le proprietà con l'eccezione della proprietà commutativa della moltiplicazione e dell'esistenza dell'inverso (esistono matrici non invertibili).

Nota 2.20 Nella definizione di campo abbiamo utilizzato la nomenclatura (addizione, moltiplicazione, etc.) e la simbologia ($1, 0, -a, a^{-1}$, etc.) dei numeri reali. Questo utilizzo è fatto unicamente per ragioni di comodo e non significa che gli elementi di un qualsiasi campo siano necessariamente numeri. $\triangle$

2.5 Sistemi lineari a coefficienti in un campo

Nel corso di geometria abbiamo studiato i sistemi di equazioni lineari: in particolare abbiamo stabilito quando un sistema è risolubile e abbiamo poi determinato degli algoritmi per la determinazione delle soluzioni. Per far ciò abbiamo introdotto il concetto di matrice a coefficienti reali e l'insieme delle matrici $M(\mathbb{R}, p, q)$ a coefficienti reali con p righe e q colonne. Abbiamo poi definito in $M(\mathbb{R}, p, q)$ un'operazione di addizione. Abbiamo cioè definito la funzione:

$$\begin{aligned} + : M(\mathbb{R}, p, q) \times M(\mathbb{R}, p, q) &\rightarrow M(\mathbb{R}, p, q) \\ (A, B) &\rightarrow A + B \end{aligned}$$

Abbiamo poi definito l'operazione di moltiplicazione di un numero reale per una matrice. Abbiamo cioè definito la funzione:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times M(\mathbb{R}, p, q) &\rightarrow M(\mathbb{R}, p, q) \\ (k, A) &\rightarrow k \cdot A \end{aligned}$$

Ciò ci ha permesso di parlare di combinazioni lineari di matrici di $M(\mathbb{R}, p, q)$ con coefficienti reali, di matrici linearmente indipendenti e indipendenti in $\mathbb{R}$. Considerando poi le righe (o le colonne) di matrici come particolari matrici, abbiamo parlato di combinazioni lineari a coefficienti in $\mathbb{R}$ di righe o colonne di una matrice e di righe (o colonne) linearmente dipendenti e indipendenti in $\mathbb{R}$. Per ogni coppia di matrici $A \in M(\mathbb{R}, p, q)$ e $B \in M(\mathbb{R}, q, s)$ abbiamo definito la matrice prodotto righe per colonne $A \cdot B \in M(\mathbb{R}, p, s)$. Abbiamo cioè definito la funzione:

$$\begin{aligned} \cdot : M(\mathbb{R}, p, q) \times M(\mathbb{R}, q, s) &\rightarrow M(\mathbb{R}, p, s) \\ (A, B) &\rightarrow A \cdot B \end{aligned}$$

Ciò ci ha permesso di scrivere un sistema di equazioni lineari nella forma matriciale

$$AX = B.$$

A partire dalla definizione del prodotto abbiamo poi introdotto il concetto di matrice invertibile in $M(\mathbb{R}, n, n)$.

Per ogni matrice $A \in M(\mathbb{R}, n, n)$ abbiamo poi definito il suo determinante. Abbiamo cioè definito la funzione:

$$\begin{aligned} \det : M(\mathbb{R}, n, n) &\rightarrow \mathbb{R} \\ A &\rightarrow \det A \end{aligned}$$

Abbiamo visto che una matrice è invertibile se e solo se il suo determinante è non nullo.

Abbiamo poi introdotto il concetto di rango di una matrice $A \in M(\mathbb{R}, p, q)$. Abbiamo cioè definito la funzione:

$$\begin{aligned} \text{rk} : M(\mathbb{R}, p, q) &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \\ A &\rightarrow \text{rk } A \end{aligned}$$

Tutto ciò ci ha permesso di dare alcuni algoritmi per la discussione e risoluzione di sistemi di equazioni lineari. Abbiamo introdotto l'algoritmo di Cramer per sistemi di n equazioni in n incognite aventi la matrice dei coefficienti invertibile. Abbiamo poi presentato gli algoritmi di Rouché-Capelli e di Gauss per sistemi in un numero di incognite ed equazioni qualunque (non necessariamente uguali fra loro). Sfruttando le operazioni elementari sulle righe abbiamo determinato un algoritmo per calcolare il rango di una matrice qualsiasi, il determinante di una matrice quadrata e l'inversa di una matrice quadrata invertibile.

In tutte le definizioni e dimostrazioni date (e anche in quelle non date in maniera esplicita) si sono utilizzate solo le proprietà di campo di $\mathbb{R}$.

Non abbiamo utilizzato altre proprietà tipiche dei numeri reali, quali, ad esempio, l'ordinamento dei numeri reali (dati a e b reali è verificata una e una sola delle relazioni $a = b$ o $a < b$ o $a > b$), né il fatto che dati a e b reali con $a < b$ allora esistono infiniti reali x tali che $a < x < b$, né tantomeno la possibilità di estrarre radici n -esime di numeri reali $x \geq 0$ (abbiamo considerato solo sistemi di primo grado). Pertanto, dato un qualsiasi campo $\mathbb{K}$ possiamo definire tutti concetti e dimostrare tutti i risultati dati in precedenza. Abbiamo pertanto:

Proposizione 2.21 *Tutte le definizioni e i teoremi visti nel corso del primo anno riguardanti le matrici a elementi reali, le loro operazioni e i sistemi di equazioni lineari a coefficienti reali rimangono valide quando al campo dei numeri reali si sostituisce un campo qualsiasi.*

2.6 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.2.1 Per mostrare che la sottrazione in $\mathbb{R}$ non è commutativa dobbiamo trovare due numeri a e b tali che $a - b \neq b - a$. Si vede

subito che $a - b = b - a$ se e solo se $a = b$. Se scegliamo allora a e b diversi tra loro, ad esempio $a = 0$ e $b = 1$ abbiamo che $a - b \neq b - a$.

Per mostrare invece che la sottrazione in $\mathbb{R}$ non è associativa dobbiamo trovare tre numeri a , b e c tali che $(a - b) - c \neq a - (b - c)$. Ora

$$(a - b) - c = a + (-b) + (-c)$$

e

$$a - (b - c) = a + (-b) + c.$$

Dunque $(a - b) - c = a - (b - c)$ se e solo se

$$a + (-b) + (-c) = a + (-b) + c.$$

Per la legge di cancellazione questo si verifica solo se $c = -c$, ovvero se $c = 0$. Basta allora scegliere a , b e c con $c \neq 0$, ad esempio $a = b = 0$ e $c = 1$ e vediamo che $(a - b) - c \neq a - (b - c)$.

Soluzione dell'esercizio di base EB.2.2 Osserviamo che

$$(-a) \cdot b + a \cdot b = ((-a) + a) \cdot b = 0 \cdot b = 0.$$

Dunque $(-a) \cdot b$ è l'opposto di $a \cdot b$, vale a dire $(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$. Notiamo ora che $a \cdot (-b) = (-b) \cdot a$, e, dunque, per quanto abbiamo appena dimostrato si ha

$$(-b) \cdot a = -(b \cdot a) = -(a \cdot b).$$

Infine

$$(-a) \cdot (-b) = -(a \cdot (-b)) = -(-(a \cdot b)) = a \cdot b.$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.2.3 Se $a = c - b$ chiaramente risulta $a + b = c$. Se viceversa supponiamo che $a + b = c$ sommando $-b$ a entrambi i membri di questa uguaglianza otteniamo il risultato cercato.

Se $a = c \cdot b^{-1}$ chiaramente risulta $a \cdot b = c$. Se viceversa $a \cdot b = c$ moltiplicando per b^{-1} entrambi i membri di questa uguaglianza otteniamo il risultato cercato.

2.7 Sunto

2.7.1 Definizione di campo

Definizione Un campo è un insieme (non vuoto) $\mathbb{K}$ dotato di due **operazioni** che indichiamo con $+$ e $\cdot$ e chiamiamo rispettivamente **addizione** e **moltiplicazione**, e che soddisfano le proprietà date nel paragrafo 2.3.

L'elemento neutro rispetto alla somma viene indicato con il simbolo 0 , l'elemento neutro rispetto al prodotto viene indicato con il simbolo 1 . $\triangle$

Nota Nella definizione di campo abbiamo utilizzato la nomenclatura (addizione, moltiplicazione, etc.) e la simbologia (1 , 0 , $-a$, a^{-1} , etc.) dei numeri reali. Questo utilizzo è fatto unicamente per ragioni di comodo e non significa che gli elementi di un qualsiasi campo siano necessariamente numeri. $\triangle$

2.7.2 Proprietà dei campi

Proposizione Se il campo $\mathbb{K}$ ha almeno due elementi allora l'elemento neutro rispetto alla somma e l'elemento neutro rispetto al prodotto sono diversi ($0 \neq 1$).

Definizione In un campo $\mathbb{K}$ possiamo introdurre l'operazione di **sottrazione** nel modo seguente: dati a e b in $\mathbb{K}$ poniamo

$$a - b := a + (-b). \quad \triangle$$

Proposizione *Proprietà di semplificazione rispetto all'addizione.* Siano a, b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$. Allora

$$a = b \text{ se e solo se } a + c = b + c.$$

Proposizione Per ogni elemento a in $\mathbb{K}$ si ha $a \cdot 0 = 0$.

Proprietà. Se a e b sono elementi di un campo $\mathbb{K}$ allora si ha

$$(-a) \cdot b = a \cdot (-b) = -(a \cdot b), \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Proposizione *Proprietà di semplificazione rispetto alla moltiplicazione.* Siano a, b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$, con $c \neq 0$. Allora

$$a = b \text{ se e solo se } a \cdot c = b \cdot c.$$

Proposizione *Principio dell'annullamento del prodotto:* Se a e b sono due elementi di un campo $\mathbb{K}$ tali che $a \cdot b = 0$ allora almeno uno tra a e b è uguale a 0 .

Proposizione Siano a, b e c elementi di un campo $\mathbb{K}$ con $a \neq 0$. L'equazione nell'incognita x :

$$a \cdot x + b = c$$

ha un'unica soluzione data da:

$$x = (c - b) \cdot a^{-1}.$$

Esempio 1. l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali, l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

2. L'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi non è un campo.

3. L'insieme $M(\mathbb{R}, n, n)$ delle matrici quadrate reali di ordine n (con $n \geq 2$) con le usuali operazioni di addizione e moltiplicazione riga per colonna non è un campo. $\triangle$

2.7.3 Sistemi lineari a coefficienti in un campo

Proposizione Tutte le definizioni e i teoremi visti nel corso del primo anno riguardanti le matrici a elementi reali, le loro operazioni e i sistemi di equazioni lineari a coefficienti reali rimangono valide quando al campo dei numeri reali si sostituisce un campo qualsiasi.

2.8 Esercizi

Esercizio E.2.1 Verificare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

1. Le eventuali soluzioni di un sistema di equazioni lineari in cui tutti i coefficienti e i termini noti sono numeri interi sono tutte formate da numeri interi.
2. Le eventuali soluzioni di un sistema di equazioni lineari in cui tutti i coefficienti e i termini noti sono numeri razionali sono tutte formate da numeri razionali.
3. Le eventuali soluzioni di un sistema di equazioni lineari in cui tutti i coefficienti e i termini noti sono numeri reali positivi sono tutte formate da numeri reali positivi.
4. Le eventuali soluzioni di un sistema di equazioni lineari aventi tutti i coefficienti complessi sono tutte formate da numeri complessi.
5. Le eventuali soluzioni di un sistema di equazioni lineari aventi tutti i coefficienti complessi e non reali sono tutte formate da numeri complessi non reali.

2.9 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.2.1 1. Affermazione falsa. Osserviamo che l'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi non è un campo. Non possiamo quindi applicare quel che abbiamo detto sui sistemi di equazioni lineari a coefficienti in un campo. Ciò però non implica a priori che l'affermazione sia falsa. Per dire che l'affermazione è falsa abbiamo bisogno di un controesempio. Dobbiamo cioè esibire un sistema di equazioni lineari avente tutti i coefficienti interi che ha soluzioni non intere. Diamo un controesempio molto semplice. Consideriamo il sistema formato da una sola equazione in un'incognita

$$2x = 1$$

Tutti i coefficienti sono numeri interi, eppure la sola soluzione del sistema, $x = \frac{1}{2}$ non è intera.

2. Affermazione vera. L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un campo. Le eventuali soluzioni sono quindi tutte formate da numeri razionali.
3. Affermazione falsa. L'insieme dei numeri reali positivi non è un campo (manca lo zero, manca l'opposto). Non possiamo quindi applicare la teoria dei sistemi di equazioni lineari a coefficienti in un campo. Viene lasciata come esercizio la ricerca di un controesempio.
4. Affermazione vera. L'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un campo. Le eventuali soluzioni sono quindi tutte formate da numeri complessi.
5. Affermazione falsa. L'insieme dei numeri complessi che non sono numeri reali non è un campo (perché?). Non possiamo quindi applicare la teoria dei sistemi di equazioni lineari a coefficienti in un campo. Viene lasciata come esercizio la ricerca di un controesempio.

Capitolo 3

Spazi vettoriali a coefficienti in un campo

3.1 Introduzione

Nel capitolo 2 abbiamo visto come i risultati su sistemi lineari e matrici valgano anche se i coefficienti considerati, anziché appartenere a $\mathbb{R}$ appartengono a un campo qualsiasi $\mathbb{K}$. Per far ciò avevamo notato come le proprietà che abbiamo utilizzato per studiare i sistemi lineari a coefficienti reali fossero unicamente le proprietà di campo di $\mathbb{R}$.

In questo capitolo in maniera analoga estendiamo la definizione e i risultati sugli spazi vettoriali al caso in cui gli scalari siano elementi di un campo qualsiasi $\mathbb{K}$.

3.2 Spazi vettoriali su un campo qualsiasi

Definizione 3.1 Sia $\mathbb{K}$ un campo fissato. Sia dato un insieme non vuoto V , i cui elementi vengono chiamati **vettori**. Chiameremo invece **scalari** gli elementi di $\mathbb{K}$. In V sia definita un'**operazione binaria interna**, cioè una legge che ad ogni coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ di vettori di V associ un vettore di V che indichiamo con il simbolo $\mathbf{v} + \mathbf{w}$. Tale operazione viene chiamata **addizione** in V e il vettore $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ viene detto **somma** dei vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Sia inoltre definita un'**operazione binaria esterna**, cioè una legge che ad ogni coppia $(k, \mathbf{v})$ formata da uno scalare k e da un vettore $\mathbf{v}$ di V associ un vettore di V che indichiamo con il simbolo $k\mathbf{v}$. Tale operazione viene chiamata **moltiplicazione per uno scalare** e il vettore $k\mathbf{v}$ viene detto **prodotto** dello scalare k per il vettore $\mathbf{v}$.

L'insieme V dotato delle operazioni di addizione e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare viene detto **spazio vettoriale** su $\mathbb{K}$ se sono verificate le proprietà:

1. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ per ogni $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in V$.
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in V$.
3. Esiste un vettore $\mathbf{e}$ tale che $\mathbf{u} + \mathbf{e} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$.

Si può dimostrare (vedi oltre) che un tale vettore $\mathbf{e}$ è unico. Indichiamo questo vettore con il simbolo $\mathbf{0}$ e lo chiamiamo **vettore nullo**.

Scriveremo allora $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$.

4. Per ogni vettore $\mathbf{u}$ esiste un vettore $\mathbf{v}$ tale che $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Si può dimostrare (vedi oltre) che un tale vettore $\mathbf{v}$ è unico. Indichiamo questo vettore con il simbolo $-\mathbf{u}$ e lo chiamiamo **vettore opposto** del vettore $\mathbf{v}$.

Scriveremo allora $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$.

5. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$.

6. $h(k\mathbf{u}) = (hk)\mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$, $h \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$.

7. $(h+k)\mathbf{u} = h\mathbf{u} + k\mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$, $h \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$.

8. $h(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = h\mathbf{u} + h\mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$, $\mathbf{v} \in V$, $h \in \mathbb{K}$. Δ

Esercizio di base EB.3.1 Dimostrare l'unicità del vettore nullo. Δ

Esercizio di base EB.3.2 Dimostrare l'unicità del vettore opposto. Δ

Estendiamo al caso di spazi vettoriali su un campo qualsiasi alcune definizioni e proprietà che abbiamo introdotto nel caso degli spazi vettoriali sul campo dei numeri reali.

Proposizione 3.2 *Dato uno spazio vettoriale V su un campo K si ha:*

- 1) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ per ogni $a \in \mathbb{K}$
- 2) $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$ per ogni $\mathbf{v} \in V$
- 3) $(-a)\mathbf{v} = -a\mathbf{v}$ per ogni $a \in \mathbb{K}$, per ogni $\mathbf{v} \in V$
- 4) Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ e se $a\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora $a = 0$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.3.3 Dimostrare la proposizione precedente Δ

Definizione 3.3 Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ dei vettori di uno spazio vettoriale V e siano $k_1, k_2, \dots, k_r$ degli scalari, cioè elementi del campo $\mathbb{K}$. Chiamiamo **combinazione lineare** dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ a coefficienti $k_1, k_2, \dots, k_r$ il vettore

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r. \quad \Delta$$

Definizione 3.4 Diciamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sono **linearmente dipendenti** se esistono $k_1, k_2, \dots, k_r$ elementi del campo $\mathbb{K}$ non tutti nulli tali che:

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_r\mathbf{v}_r = \mathbf{0}.$$

Detto in altri termini, i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sono linearmente dipendenti se il vettore nullo può essere espresso come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ oltre che nel modo banale (cioè quello in cui tutti i coefficienti sono nulli) anche in qualche altro modo. Δ

Definizione 3.5 Indichiamo con il simbolo $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Cioè:

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle := \{k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_r \mathbf{v}_r \mid k_1 \in \mathbb{R}, k_2 \in \mathbb{R}, \dots, k_r \in \mathbb{R}\}.$$

Se $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ diciamo che V è **uno spazio vettoriale generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$. Questi ultimi vettori vengono detti **generatori** di V . Δ

Definizione 3.6 Diciamo che i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ di uno spazio V costituiscono una **base** di V se sono verificate entrambe le proprietà

- $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$;
- $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$ sono linearmente indipendenti. Δ

Teorema 3.7 *Un insieme finito di vettori di uno spazio vettoriale V è una base se e solo se ogni vettore $\mathbf{v}$ di V si può esprimere in uno ed in un sol modo come combinazione lineare di tali vettori.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Esercizio di base EB.3.4 Dimostrare il teorema precedente. Δ

Definizione 3.8 Data una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ di uno spazio vettoriale V su un campo K , abbiamo visto che ogni vettore $\mathbf{v}$ di V si scrive in un sol modo come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. I coefficienti di tale combinazione lineare si dicono **coordinate** del vettore $\mathbf{v}$ relative alla base data. Δ

3.3 Esempi di spazi vettoriali

Diamo ora alcuni esempi di spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$.

1. Si consideri un piano π ed un suo punto O . Chiamiamo **vettore** di π applicato in O la coppia (O, P) dove P è un punto di π . Indichiamo con $V^2(\pi, O)$ l'insieme dei vettori di π applicati in O . Introducendo l'usuale definizione di addizione tra due vettori per mezzo della regola del parallelogramma e l'usuale moltiplicazione di un vettore per uno scalare, otteniamo uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali.
Due qualsiasi vettori di π non nulli applicati in O che non siano allineati formano una base di $V^2(\pi, O)$.
2. Analogamente l'insieme $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un suo punto O , con le usuali operazioni di addizione tra vettori e di moltiplicazione di un vettore per uno scalare, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una sua base è data da tre vettori applicati in O che non siano complanari.
3. L'insieme $\mathbb{R}$, con le usuali operazioni di addizione e di moltiplicazione, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ stesso. Una sua base è data dal numero 1. Tale base viene detta **base canonica** di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}$.
Un qualsiasi numero reale non nullo forma una base di $\mathbb{R}$.
4. L'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali, con le usuali operazioni di addizione di coppie e di moltiplicazione di una coppia per un numero reale, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La coppia di vettori $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ forma una base di $\mathbb{R}^2$ sul campo $\mathbb{R}$, detta **base canonica** di $\mathbb{R}^2$.

5. L'insieme $\mathbb{R}^n$ delle n -ple di numeri reali, con le usuali operazioni di addizione di n -ple e di moltiplicazione di una n -pla per un numero reale, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Gli n vettori

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$$

formano una base di $\mathbb{R}^n$ su $\mathbb{R}$, detta **base canonica** di $\mathbb{R}^n$.

6. Notiamo che, nel dimostrare che $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, sfruttiamo solamente il fatto che $\mathbb{R}$ è un campo. Quindi, dato un campo $\mathbb{K}$, possiamo dimostrare in modo analogo che $\mathbb{K}, \mathbb{K}^2, \mathbb{K}^n$ sono spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Anche in questo caso si hanno le basi canoniche. Il vettore 1, elemento neutro rispetto alla moltiplicazione di $\mathbb{K}$, è la **base canonica** dello spazio vettoriale $\mathbb{K}$ sul campo $\mathbb{K}$ stesso. I vettori $(1, 0), (0, 1)$ formano la **base canonica** di $\mathbb{K}^2$ su $\mathbb{K}$. Analogamente si ha la **base canonica** di $\mathbb{K}^n$ su $\mathbb{K}$.
7. Dato l'insieme $M(\mathbb{R}, p, q)$ delle matrici ad elementi reali a p righe e q colonne, si consideri in esso l'operazione di addizione tra matrici e l'operazione di moltiplicazione di una matrice per un numero reale. Si ha uno spazio vettoriale sui reali. Sia $A(i, j)$ la matrice avente tutti gli elementi uguali a 0, fuorchè l'elemento della i -sima riga e j -sima colonna che è uguale a 1. L'insieme delle $p \cdot q$ matrici $A(i, j)$ è una base di $M(\mathbb{R}, p, q)$. Essa viene detta **base canonica**.
8. Tutto ciò si generalizza al caso di matrici ad elementi in un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi. Si ha che $M(\mathbb{K}, p, q)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. La base data dalle matrici $A(i, j)$ viene detta anche in questo caso **base canonica**.
9. Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi. Esso è, con le usuali operazioni, uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ stesso (esempio 6). La sua **base canonica** è data dal numero 1. Vogliamo considerare ora $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. A tale scopo consideriamo l'usuale addizione tra numeri complessi e la moltiplicazione di un numero complesso per un numero reale. Si ottiene uno spazio vettoriale. Una sua base è data da $\{1, i\}$. Essa è detta **base canonica** dello spazio vettoriale $\mathbb{C}$ sul campo $\mathbb{R}$ dei reali. Notiamo che, se consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, i vettori 1 e i non sono linearmente indipendenti. Si ha infatti $i \cdot 1 + (-1) \cdot i = 0$. Abbiamo quindi una loro combinazione lineare a coefficienti non nulli che è uguale al vettore nullo.
10. Sia dato l'insieme $\mathbb{C}^2$ delle coppie di numeri complessi. Abbiamo visto che, se in esso si considerano le usuali operazioni di addizione tra coppie e di moltiplicazione di una coppia per un numero complesso, otteniamo uno spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ (esempio 6). La sua **base canonica** è data da $\{(1, 0), (0, 1)\}$.
11. Consideriamo ora, in analogia al caso precedente, le operazioni di addizione tra coppie di numeri complessi e di moltiplicazione di una coppia di numeri complessi per un numero reale. Abbiamo così uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. I vettori $\{(1, 0), (i, 0), (0, 1), (0, i)\}$ formano una base, detta **base canonica** dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^2$ sul campo dei reali.
12. In modo analogo, per ogni intero $n > 0$, possiamo definire lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ sul campo dei reali. Esso è dotato della **base canonica** formata da $2n$ vettori. Essi sono dati dalle n -ple di numeri complessi, aventi tutti gli elementi nulli fuorchè uno che è uguale a 1 o a i . Lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ sul campo $\mathbb{R}$ ha quindi una base formata da $2n$ vettori.

13. Si consideri l'insieme $\mathbb{R}^n[x]$ dei polinomi di grado minore di n a coefficienti in $\mathbb{R}$ in una variabile x . Consideriamo in esso l'usuale addizione tra polinomi e l'usuale moltiplicazione di un polinomio per un numero reale. Dati cioè i polinomi:

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} \\ q(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} \end{aligned}$$

e un numero reale k , si pone:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} \\ kp(x) &= ka_0 + ka_1x + \cdots + ka_{n-1}x^{n-1}. \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che $\mathbb{R}^n[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Una sua base è data dai vettori:

$$\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = x, \dots, \mathbf{e}_{n-1} = x^{n-1}$$

Questa base viene detta **base canonica** di $\mathbb{R}^n[x]$ su $\mathbb{R}$.

14. Anche in questo caso notiamo che, per dimostrare che $\mathbb{R}^n[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, abbiamo sfruttato solamente le proprietà di campo di R . Possiamo quindi generalizzare l'esempio precedente. Dato un campo $\mathbb{K}$, sia $\mathbb{K}^n[x]$ l'insieme dei polinomi di grado minore di n a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ nella variabile x . Esso è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. La sua **base canonica** è uguale a quella dell'esempio precedente.

Esercizio di base EB.3.5 Consideriamo l'insieme $\mathbb{C}^n[x]$ dei polinomi di grado minore di n a coefficienti in $\mathbb{C}$. Consideriamo in esso l'usuale operazione di somma tra polinomi e l'operazione di moltiplicazione di un polinomio per un numero reale. Ovviamente abbiamo uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Determinarne una base. $\triangle$

3.4 Basi di Lagrange

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ dei polinomi in una variabile x , di grado minore di 3 a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$ dei reali. Supponiamo di avere tre numeri reali x_1, x_2, x_3 distinti e supponiamo di avere tre numeri reali b_1, b_2, b_3 qualsiasi. Ci chiediamo se esistono polinomi $p(x) \in \mathbb{R}^3[x]$ per cui si abbia

$$p(x_1) = b_1 \quad p(x_2) = b_2 \quad p(x_3) = b_3.$$

Per rispondere a questa domanda, prendiamo un polinomio generico

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

e imponiamo le condizioni richieste. Otteniamo un sistema di tre equazioni nelle tre incognite a_0, a_1, a_2 . La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante non nullo (è una matrice di Vandermonde). Il sistema ammette quindi una ed una sola soluzione (teorema di Cramer). Abbiamo quindi il seguente risultato.

Teorema 3.9 *Dati tre numeri reali x_1, x_2, x_3 distinti e tre numeri reali b_1, b_2, b_3 qualsiasi, esiste uno ed un solo polinomio $p(x) \in \mathbb{R}^3[x]$ per cui si abbia*

$$p(x_1) = b_1 \quad p(x_2) = b_2 \quad p(x_3) = b_3.$$

DIMOSTRAZIONE. Appena fatta. $\square$

Nota 3.10 Si può dare un significato geometrico al teorema appena dimostrato. Fissato un sistema di riferimento cartesiano nel piano, dati tre punti distinti di esso non appartenenti a due a due ad una stessa retta parallela all'asse delle ordinate, per i tre punti passa o una retta o una parabola avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate. Δ

Vogliamo ora determinare effettivamente il polinomio del teorema 3.9. Potremmo determinarlo risolvendo il sistema, per esempio utilizzando la regola di Cramer. Ma noi vogliamo fare il minimo di calcoli. Proviamo allora a risolvere un problema più semplice. Vogliamo determinare un polinomio $p_1(x) \in \mathbb{R}^3[x]$ per cui si abbia:

$$p_1(x_1) = 1 \quad p_1(x_2) = 0 \quad p_1(x_3) = 0.$$

Sappiamo dal teorema precedente che un polinomio siffatto esiste ed è unico. Notiamo che il polinomio cercato deve avere x_2 e x_3 come radici. Esso deve allora avere come fattori $(x - x_2)$ e $(x - x_3)$. Ma allora si deve avere $p_1(x) = a(x - x_2)(x - x_3)$, con a numero reale che dobbiamo ancora determinare. Determiniamo a ricordandoci che il polinomio cercato deve valere 1 in x_1 . In definitiva otteniamo:

$$p_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}$$

Notiamo che il polinomio $b_1 p_1(x)$ verifica le condizioni:

$$b_1 p_1(x_1) = b_1 \quad b_1 p_1(x_2) = 0 \quad b_1 p_1(x_3) = 0.$$

Torniamo al nostro problema iniziale: vogliamo determinare il polinomio che assuma in x_1, x_2, x_3 rispettivamente i valori b_1, b_2, b_3 . Ricordiamo che il polinomio $b_1 p_1(x)$ assume in x_1 il valore desiderato e che negli altri due punti si annulla. Dovrebbe ora essere chiaro il procedimento da seguire. Consideriamo il polinomio:

$$p_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}$$

esso verifica le condizioni:

$$p_2(x_1) = 0 \quad p_2(x_2) = 1 \quad p_2(x_3) = 0.$$

Consideriamo poi il polinomio:

$$p_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}$$

esso verifica le condizioni:

$$p_3(x_1) = 0 \quad p_3(x_2) = 0 \quad p_3(x_3) = 1.$$

E quindi il polinomio:

$$p(x) = b_1 p_1(x) + b_2 p_2(x) + b_3 p_3(x)$$

verifica le condizioni richieste:

$$p(x_1) = b_1 \quad p(x_2) = b_2 \quad p(x_3) = b_3.$$

Ecco che abbiamo determinato il nostro polinomio non facendo praticamente alcun calcolo.

Teorema 3.11 *I polinomi:*

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} \\ p_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} \\ p_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \end{aligned}$$

formano una base, detta **base di Lagrange relativa a** x_1, x_2, x_3 , dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$.

DIMOSTRAZIONE Dobbiamo dimostrare innanzitutto che i tre vettori generano lo spazio vettoriale. Sia $q(x)$ un polinomio di $\mathbb{R}^3[x]$. Dobbiamo dimostrare che esso è esprimibile come combinazione lineare dei tre vettori. Consideriamo i valori $q(x_1), q(x_2), q(x_3)$ assunti da $q(x)$ in x_1, x_2, x_3 .

Notiamo che il polinomio $p(x) = q(x_1)p_1(x) + q(x_2)p_2(x) + q(x_3)p_3(x)$ assume sui tre punti gli stessi valori assunti dal polinomio $q(x)$. Dal teorema 3.9 segue allora $q(x) = p(x)$, proprio ciò che volevamo dimostrare.

Dobbiamo ora dimostrare che i tre polinomi sono linearmente indipendenti. Sia $p(x) = b_1p_1(x) + b_2p_2(x) + b_3p_3(x) = 0$. Dobbiamo dimostrare che i tre coefficienti della combinazione lineare sono tutti nulli. Il polinomio $p(x)$, poiché è, per ipotesi, identicamente nullo, assume sui tre punti il valore 0. Ma il valore assunto da $p(x)$ sui punti x_1, x_2, x_3 è uguale rispettivamente a b_1, b_2, b_3 . Da ciò otteniamo $b_1 = b_2 = b_3 = 0$; cioè la tesi. ■

Nota 3.12 In precedenza avevamo considerato la base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$. Abbiamo ora determinato un'altra base, quella di Lagrange. Ognuna delle due basi ha i suoi pregi e difetti. Quella canonica ha il vantaggio che le coordinate di un polinomio relative ad essa sono proprio i coefficienti del polinomio; quella di Lagrange permette di evitare molti calcoli quando si voglia determinare un polinomio che assuma determinati valori in determinati punti. Vi sono altre basi di $\mathbb{R}^3[x]$ che, in particolari situazioni, potrebbero essere più convenienti della base canonica o della base di Lagrange. La scelta della base più conveniente dipende ovviamente dall'intuito. △

Esempio 3.13 Il polinomio $p(x) \in \mathbb{R}^3[x]$ tale che

$$p(0) = 7 \quad p(3) = 2 \quad p(9) = 9$$

è dato da:

$$p(x) = 7 \frac{(x-3)(x-9)}{(0-3)(0-9)} + 2 \frac{(x-0)(x-9)}{(3-0)(3-9)} + 9 \frac{(x-0)(x-3)}{(9-0)(9-3)}$$

Nota 3.14 Notiamo che, nel costruire la base di Lagrange, abbiamo sfruttato solamente le proprietà di campo di $\mathbb{R}$. Possiamo quindi generalizzare tutto ciò al caso di polinomi in $K^3[x]$ con K campo qualsiasi. △

Nota 3.15 (Generalizzazione) Vogliamo ora determinare un polinomio $p(x)$ a coefficienti reali che assuma in n punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ distinti i valori reali $b_1, b_2, \dots, b_n$. Con un procedimento analogo a quello dato nel teorema 3.9 si dimostra che di polinomi siffatti di grado minore di n ne esiste uno ed uno solo. Per determinarlo effettivamente conviene definire una **base di Lagrange** di $\mathbb{R}^n[x]$. Essa è analoga alla base di Lagrange di $\mathbb{R}^3[x]$. La sua costruzione viene lasciata per esercizio. △

Esercizio di base EB.3.6 Determinare un polinomio di grado minore di 4 a coefficienti reali che assuma nei punti 0, 7, 8, 9 i valori 2, 5, 12, 31 rispettivamente. $\triangle$

3.5 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.3.1 La dimostrazione è analoga alla dimostrazione di 2.2.

Soluzione dell'esercizio di base EB.3.2 La dimostrazione è analoga alla dimostrazione di 2.3.

Soluzione dell'esercizio di base EB.3.3 Se proprio non si riesce a dare da soli le dimostrazioni, andare a vedere le dimostrazioni fatte nel caso degli spazi vettoriali sui reali: ci si accorgerà che non vi è quasi niente da cambiare.

Soluzione dell'esercizio di base EB.3.4 Se proprio non si riesce a dare da soli la dimostrazione, andare a vedere la dimostrazione fatta nel caso degli spazi vettoriali sui reali: ci si accorgerà che non vi è quasi niente da cambiare.

Soluzione dell'esercizio di base EB.3.5 Una base dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ sul campo $\mathbb{R}$ è data da:

$$\mathbf{v}_1 = 1, \mathbf{v}_2 = i, \mathbf{v}_3 = x, \mathbf{v}_4 = ix, \dots, \mathbf{v}_{2n-1} = x^{n-1}, \mathbf{v}_{2n} = ix^{n-1}$$

Chiamiamo **base canonica** tale base.

3.6 Esercizi

Esercizio E.3.1 Determinare il polinomio $p(x) \in R^3[x]$ tale che

$$p(\pi) = 0.1 \quad p(1.5) = 0 \quad p(\sqrt{2}) = 12$$

Esercizio E.3.2 Determinare il polinomio di grado minimo a coefficienti reali che assuma in 3, 2, 4, 5 e 9 i valori 0, 3, 1, 0 e π .

Esercizio E.3.3 Siano x_1 , x_2 e $x - 3$ tre numeri reali distinti e siano b_1 , b_2 e b_3 tre numeri reali qualsiasi.

Sappiamo che esiste uno ed un solo polinomio $p(x) \in R^3[x]$ tale che

$$p(x_1) = b_1, p(x_2) = b_2, p(x_3) = b_3$$

Quanti polinomi appartenenti a $R^4[x]$ esistono verificanti le tre condizioni precedenti?

Esercizio E.3.4 Determinare il polinomio $p(x)$ di grado minimo a coefficienti complessi tale che:

$$p(1) = p(2) = i \quad p(i) = p(2i) = 1$$

3.7 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.3.1 Per rispondere alla domanda si potrebbe ovviamente scrivere un generico polinomio e imporre le condizioni richieste. Ma così facendo si perde troppo tempo.

Conviene invece fissare la base di Lagrange relativa ai valori π , 1.5 e $\sqrt{2}$. Essa è data $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ con:

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \frac{(x-1.5)(x-\sqrt{2})}{(\pi-1.5)(\pi-\sqrt{2})} \\ p_2(x) &= \frac{(x-\pi)(x-\sqrt{2})}{(1.5-\pi)(1.5-\sqrt{2})} \\ p_3(x) &= \frac{(x-\pi)(x-1.5)}{(\sqrt{2}-\pi)(\sqrt{2}-1.5)} \end{aligned}$$

Il polinomio cercato è dato da:

$$p(x) = 0.1p_1(x) + 12p_3(x)$$

Soluzione dell'esercizio E.3.2 Sappiamo che il polinomio cercato appartiene a $R^5[x]$. Consideriamo quindi la base di Lagrange relativa a 3, 2, 4, 5 e 9. Il polinomio cercato è il polinomio avente coordinate 0, 3, 1, 0 e π relative a tale base.

Soluzione dell'esercizio E.3.3 Sappiamo che il polinomio di $R^3[x]$ verificante le condizioni date è il polinomio

$$p(x) = b_1p_1(x) + b_2p_2(x) + b_3p_3(x)$$

dove

$$\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$$

è la base di Lagrange di $R^3[x]$ relativa a x_1 , x_2 e x_3 .

Ma ora noi cerchiamo tutti i polinomi di $R^4[x]$ verificanti le condizioni date. La base di Lagrange di $R^3[x]$ non è una base di $R^4[x]$. Infatti ogni combinazione lineare dei vettori di tale base è un polinomio di grado minore di 3.

Per ottenere una base di Lagrange di $R^4[x]$ abbiamo bisogno di un altro valore x_4 distinto dai primi 3.

Consideriamo ora una base di Lagrange $\{q_1(x), q_2(x), q_3(x), q_4(x)\}$ relativa a x_1, x_2, x_3, x_4 .

Attenzione: i primi tre vettori di questa nuova base si guardano bene dall'essere uguali ai vettori della base di Lagrange di $R^3[x]$ considerata in precedenza!

Bene, i vettori di $R^4[x]$ verificanti le tre condizioni assegnate sono:

$$p(x) = p(x) = b_1q_1(x) + b_2q_2(x) + b_3q_3(x) + cq_4(x)$$

dove b_1, b_2, b_3 sono i valori fissati ma dove c_4 è un numero reale qualsiasi.

Quindi ad ogni numero reale c_4 corrisponde un vettore. A valori diversi di c_4 corrispondono vettori diversi (perché?). Poiché i numeri reali sono infiniti, abbiamo infiniti polinomi verificanti le tre condizioni richieste.

Soluzione dell'esercizio E.3.4 Sappiamo che in $C^4[x]$ esiste uno ed un solo polinomio verificante le condizioni richieste.

Consideriamo la base di Lagrange

$$\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$$

di $C^4[x]$ relativa a $1, 2, i, 2i$.

Il polinomio cercato è

$$p(x) = i \cdot p_1(x) + i \cdot p_2(x) + p_3(x) + p_4(x)$$

Capitolo 4

Dimensione di uno spazio vettoriale

4.1 Introduzione

Dedichiamo questo capitolo ad un concetto fondamentale in algebra lineare: la dimensione di uno spazio vettoriale.

Daremo una definizione che generalizza quella vista nel corso di geometria.

Prima di far ciò abbiamo bisogno di ricordare come si può estrarre da un numero finito di vettori il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

4.2 Vettori e matrici

Esempio 4.1 Consideriamo lo spazio vettoriale $R^3[x]$ e due suoi vettori (quindi polinomi) $\mathbf{v}_1 := 1 + x$ e $\mathbf{v}_2 = 2 + 3x + 4x^2$. Le coordinate di $\mathbf{v}_1$, relative alla base canonica di $R^3[x]$ sono $(1, 1, 0)$, mentre le coordinate di $\mathbf{v}_2$ sono $(2, 3, 4)$.

Consideriamo ora la combinazione lineare con coefficienti 2 e 5 dei due polinomi, cioè il polinomio $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$. Si ha:

$$2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 = 12 + 17x + 20x^2$$

Pertanto le coordinate di $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$ relative alla base canonica sono date da $(12, 17, 20)$. Osserviamo che si ha:

$$(12, 17, 20) = (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2, 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3, 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4)$$

Abbiamo pertanto che le coordinate relative alla base canonica di $R^3[x]$ della combinazione lineare con coefficienti 2 e 5 dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono le combinazioni lineari con coefficienti 2 e 5 delle coordinate dei due vettori.

Consideriamo ora la base di Lagrange di $R^3[x]$ relativa ai punti $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Le coordinate di $\mathbf{v}_1$ relative a tale base sono $(1, 2, 3)$, mentre le coordinate di $\mathbf{v}_2$ sono $(2, 9, 24)$ (verificare questa affermazione facendo meno calcoli possibile).

Le coordinate relative alla base di Lagrange di $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$ sono $(12, 49, 126)$ (verificare

anche questa affermazione facendo il minimo di calcoli possibile).

Si ha:

$$12 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2, \quad 49 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 9, \quad 126 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 24$$

Anche in questo caso si ha che le coordinate del vettore combinazione lineare sono le combinazioni lineari delle coordinate.

Come è facile immaginarsi, ciò non è dovuto al caso. Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 4.2 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Dati s vettori di V , le coordinate, relative alla base data, di una combinazione lineare degli s vettori sono uguali alle combinazioni lineari delle coordinate degli s vettori.*

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione è abbastanza semplice se viene divisa in vari passi.

1. Dimostrare che, se i vettori v_1 e v_2 hanno coordinate $(a_1, \dots, a_n)$ e $(b_1, \dots, b_n)$ rispettivamente, allora il vettore $v_1 + v_2$ ha coordinate $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$.
2. Dimostrare che, se il vettore v_1 ha coordinate $(a_1, \dots, a_n)$, allora il vettore $h_1 v_1$ ha coordinate $(h_1 a_1, \dots, h_1 a_n)$.
3. Dimostrare che, se i vettori v_1 e v_2 hanno coordinate $(a_1, \dots, a_n)$ e $(b_1, \dots, b_n)$, allora il vettore $h_1 v_1 + h_2 v_2$ ha coordinate $(h_1 a_1 + h_2 b_1, \dots, h_1 a_n + h_2 b_n)$.
4. Dimostrare che una formula analoga per le combinazioni lineari di 3 vettori.
5. Dimostrare una formula analoga per le combinazioni lineari di s vettori.

Tutte queste dimostrazioni vengono lasciate per esercizio. ■

Esercizio di base EB.4.1 Dimostrare i vari passi del teorema precedente. △

Supponiamo ora di avere uno spazio vettoriale V e una sua base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Siano poi dati dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s$. Può capitare di dover stabilire se essi siano linearmente indipendenti e, se non lo sono, di dover estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Vediamo come fare.

Calcoliamo, per ciascuno di essi, le sue coordinate rispetto alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$. Scriviamo cioè:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\ \mathbf{u}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{n2}\mathbf{e}_n \\ &\vdots \\ \mathbf{u}_s &= a_{1s}\mathbf{e}_1 + a_{2s}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{ns}\mathbf{e}_n \end{aligned}$$

Scriviamo ora la matrice $A \in M(n, s, \mathbb{R})$ le cui **colonne** sono date dalle coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Dunque la prima colonna è data dalle coordinate di $\mathbf{u}_1$, la seconda colonna dalle coordinate di $\mathbf{u}_2$ e così via.

Il teorema dato sopra ci assicura che i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti. Inoltre, se ciò non avviene, estrarre dai vettori il massimo numero di vettori linearmente indipendenti corrisponde ad estrarre dalla matrice A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

Nel corso di geometria abbiamo visto che il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A coincide con il rango della matrice A .

Non solo, il calcolo del rango di A ci dice anche come possiamo estrarre il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A .

- Se abbiamo calcolato il rango di A utilizzando i determinanti dei minori e M è un minore estratto da A con determinante non nullo e avente ordine uguale al rango di A , il massimo numero di colonne linearmente indipendenti si ottiene prendendo le colonne corrispondenti alle colonne del minore M . Pertanto il massimo numero di vettori linearmente indipendenti vettori tra $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s$ sono i vettori aventi come coordinate le colonne corrispondenti alle colonne di M .
- Se abbiamo calcolato il rango di A per mezzo dell'algoritmo di Gauss, e B è la matrice a scalini ottenuta a partire dalla matrice A , allora il massimo numero di colonne linearmente indipendenti sono le colonne le cui posizioni corrispondono agli scalini della matrice B . E quindi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti si ottengono prendendo i vettori tra $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_s$ le cui posizioni corrispondono agli scalini di B .

Diamo qualche esempio.

Esempio 4.3 Consideriamo i vettori $f_1(x) := 1 + x - 2x^2$, $f_2(x) := x + 3x^4$, $f_3(x) := 1 - 2x^2 - 3x^4$. Vogliamo estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

Osserviamo che i tre polinomi appartengono tutti a $\mathbb{R}^5[x]$, la cui base canonica è formata dai polinomi $1, x, x^2, x^3, x^4$. Scriviamo allora la matrice le cui colonne corrispondono alle coordinate dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è uguale a 2 e un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, quello evidenziato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque $f_1(x)$ e $f_3(x)$ sono linearmente indipendenti e $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ sono linearmente dipendenti. $\triangle$

Esempio 4.4 Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ i seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 := (1, 2, 1, 0) \quad , \quad \mathbf{v}_2 := (2, 3, 0, 1) \quad \mathbf{v}_3 := \left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

Vogliamo estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice le cui colonne corrispondono alle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Applichiamo il metodo di Gauss per il calcolo del rango di A . Dopo avere svolto i passaggi necessari troviamo la matrice a scalini:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & & & \\ 0 & & -1 & \frac{1}{2} & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

La matrice ha allora rango 2. Dunque la matrice A ha 2 e non più di due colonne linearmente indipendenti.

Gli scalini di B sono in prima e seconda posizione. Dunque i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e i tre vettori di partenza sono linearmente dipendenti. $\triangle$

Notiamo che affinché questo metodo possa essere utilizzato abbiamo bisogno di avere preliminarmente una base dello spazio vettoriale in cui stiamo operando.

Abbiamo quindi il seguente teorema.

Teorema 4.5 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Siano $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s\}$ vettori di V . Sia A la matrice a n righe e r colonne avente come colonne le coordinate degli s vettori relative alla base data. Sia p il rango della matrice A . Possiamo allora scegliere tra gli r vettori al massimo p vettori linearmente indipendenti. Essi sono dati da quei vettori le cui coordinate servono a formare un minore invertibile di A di ordine p . Inoltre tutti gli altri vettori sono combinazione lineare dei p vettori appena scelti.*

In alternativa, si riduce la matrice A in una matrice B a scalini. I vettori linearmente indipendenti sono quelli in corrispondenza dei quali vi sono gli scalini della matrice B .

4.3 Dimensione

Teorema 4.6 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Dati comunque s vettori con $s > n$, essi sono linearmente dipendenti.*

DIMOSTRAZIONE Si consideri la matrice avente come colonne le coordinate degli s vettori relativamente alla base data. Il rango di tale matrice al massimo è uguale a $n < s$. Da cui segue la tesi per la proposizione precedente. $\blacksquare$

Teorema 4.7 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K dotato di una base formata da n elementi. Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora essi formano una base di V .*

DIMOSTRAZIONE Supponiamo, per assurdo, che tali n vettori non siano generatori di V . Allora esisterebbe un vettore di V che non sarebbe combinazione lineare degli n vettori dati. Avremmo allora trovato $n + 1$ vettori linearmente indipendenti. Ciò è assurdo per il teorema precedente.

Teorema 4.8 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K .*

Siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ due sue basi. Allora si ha $n = m$.

DIMOSTRAZIONE Poiché $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ è una base, i suoi vettori sono linearmente indipendenti; quindi, per la proposizione precedente, si ha $m \leq n$. Scambiando tra loro i ruoli delle due basi si ottiene anche $n \leq m$. Da cui la tesi. ■

Definizione 4.9 Il teorema precedente ci assicura che, se uno spazio vettoriale ha una base con n elementi, allora ogni altra sua base ha n elementi. Tale numero n viene detto **dimensione** dello spazio vettoriale. △

Esercizio di base EB.4.2 Calcolare la dimensione dei seguenti spazi vettoriali:

1. lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ sui reali;
2. lo spazio vettoriale $V^3(O)$ sui reali;
3. lo spazio vettoriale K su un campo K ;
4. lo spazio vettoriale Kn su un campo K ;
5. lo spazio vettoriale $M(K, p, q)$ su un campo K ;
6. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$;
7. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$;
8. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$;
9. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{R}$;
10. lo spazio vettoriale $K^n[x]$ su K ;
11. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{C}$;
12. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{R}$.

△

Diamo ora un metodo per determinare una base di uno spazio vettoriale V .

Se $V = \{\mathbf{0}\}$, esso non è dotato di alcuna base. Non esistono infatti in V vettori linearmente indipendenti. In questo caso diciamo che V ha dimensione uguale a 0. Sia $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Esiste quindi in V almeno un vettore non nullo. Scegliamone uno e chiamiamolo $\mathbf{e}_1$. Se $\mathbf{e}_1$ genera V , esso è una base di V . Altrimenti esiste almeno un vettore di V che non è combinazione lineare di $\mathbf{e}_1$. Scegliamone uno e chiamiamolo $\mathbf{e}_2$. Quindi $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono linearmente indipendenti. Se essi generano V , abbiamo determinato una base di V . Altrimenti possiamo iterare questo procedimento. Abbiamo ora due possibilità:

- 1) ad un certo punto otteniamo n vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ che formano una base di V ;
- 2) il procedimento può continuare all'infinito. Esistono cioè, per ogni n intero, n vettori linearmente indipendenti.

Nel secondo caso diremo che lo spazio vettoriale ha **dimensione infinita**.

La dizione “dimensione infinita” deriva dal fatto che, ispirandoci al teorema 3.7, possiamo dare una nuova definizione di base:

Definizione 4.10 Un sottoinsieme (eventualmente composto da infiniti elementi) di uno spazio vettoriale V su un campo K si dice **base** se ogni vettore di V si può esprimere in uno ed un sol modo come combinazione lineare di un numero finito di elementi del sottoinsieme. Δ

Nota 4.11 Il teorema 3.7 Nel caso in cui l'insieme sia formato da un numero finito di elementi, questa nuova definizione di base coincide con la vecchia definizione. Δ

Il prossimo esempio mostra che esistono spazi vettoriali non dotati di basi finite ma dotati di basi (secondo la nuova definizione) infinite. Si può anzi dimostrare (noi non lo facciamo) che uno spazio vettoriale non formato dal solo vettore nullo è sempre dotato di una base (finita o infinita).

Esempio 4.12 Sia $R[x]$ l'insieme dei polinomi di grado qualsiasi a coefficienti reali. Tale insieme, con le usuali operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per un numero reale, è uno spazio vettoriale. Tale spazio non può essere dotato di una base formata da un numero finito di elementi. Si nota, infatti, che, dato un numero n di polinomi, qualsiasi combinazione lineare di essi è un polinomio di grado minore o uguale al massimo dei gradi degli n polinomi considerati. Tali polinomi non possono quindi generare tutto $R[x]$. Notiamo tuttavia che i polinomi $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ formano una base infinita di $R[x]$. Lasciamo la dimostrazione di quest'ultima affermazione per esercizio (ricordarsi che un polinomio è per definizione la somma di un numero finito di monomi). Δ

4.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.4.1 Dimostriamo il primo passo. Dire che $(a_1, \dots, a_n)$ sono le coordinate del vettore V_1 , vuol dire che si ha

$$v_1 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$$

Analogamente si ha

$$w_1 = b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

Quindi

$$v_1 + w_1 = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n + b_1 e_1 + \dots + b_n e_n$$

Sfruttando le proprietà degli spazi vettoriali si ottiene

$$v_1 + w_1 = (a_1 + b_1)e_1 + \dots + (a_n + b_n)e_n$$

(Si consiglia di eseguire tutti i singoli passaggi evidenziando, per ogni passaggio, quale proprietà si sono sfruttate).

Dalla ultima formula segue che il vettore $v_1 + w_1$ ha effettivamente come coordinate la somma delle coordinate dei due vettori.

In modo analogo si dimostra il secondo passo.

La dimostrazione del terzo passo si ottiene sfruttando i primi due passi. E così via. (Si consiglia di fare effettivamente la dimostrazione).

Soluzione dell'esercizio di base EB.4.2 1. Lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ sui reali ha dimensione uguale a 2;

2. lo spazio vettoriale $V^3(O)$ sui reali ha dimensione uguale a 3;
3. lo spazio vettoriale $\mathbb{K}$ su un campo $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a 1;
4. lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ su un campo $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a n ;
5. lo spazio vettoriale $M(\text{mat}dsK, p, q)$ su un campo $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a $p \cdot q$;
6. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$ ha dimensione uguale a 1;
7. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$ ha dimensione uguale a 2;
8. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ ha dimensione uguale a n ;
9. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{R}$ ha dimensione uguale a $2n$;
10. lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n[x]$ su $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a n ;
11. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{C}$ ha dimensione uguale a n ;
12. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{R}$ ha dimensione uguale a $2n$.

Per dimostrare tutte queste affermazioni considerare le basi canoniche dei rispettivi spazi vettoriali (vedere capitolo precedente).

4.5 Esercizi

Esercizio E.4.1 Si considerino i seguenti vettori di R^3 :

$\mathbf{v}_1 := (1, 0, 2)$, $\mathbf{v}_2 := (2, 0, 4)$, $\mathbf{v}_3 := (2, 1, 4)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 3, 2)$. Estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti utilizzando l'algoritmo di Gauss.

Esercizio E.4.2 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{C}^3$:

$$\mathbf{v}_1 := (1, 2, 3) , \mathbf{v}_2 := (i, 2i, 3i) , \mathbf{v}_3 := (1 + i, 2 + 2i, 3 + 3i)$$

Estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti considerando $\mathbb{C}^3$ come spazio vettoriale prima su $\mathbb{C}$ e poi su $\mathbb{R}$.

Esercizio E.4.3 Si considerino i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ $p_3(x)$ di $R^3[x]$ verificanti le seguenti condizioni:

$$p_1(1) = 5 , p_1(3) = 2 , p_1(-1) = 4$$

$$p_2(1) = 2 , p_2(3) = 4 , p_2(-1) = 7$$

$$p_3(1) = 12 , p_3(3) = 8 , p_3(-1) = 15$$

Estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

4.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.4.1 Consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate dei 4 vettori relative alla base canonica di R^3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a scalini applicando l'algoritmo di Gauss. Sommando nella matrice A alla terza riga la prima riga moltiplicata per -2 otteniamo la matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima e la terza colonna (colonne degli scalini) sono linearmente indipendenti. Poiché la matrice A' ha gli scalini nella prima e nella terza colonna, abbiamo che il primo e il terzo vettore sono linearmente indipendenti.

Soluzione dell'esercizio E.4.2 Osserviamo che in ogni caso il vettore $\mathbf{v}_3$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Ne segue che i tre vettori sono linearmente dipendenti. Consideriamo ora i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e chiediamoci se essi sono linearmente indipendenti.

1. Se consideriamo $\mathbb{C}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, abbiamo che $\mathbf{v}_2$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$. Segue che in questo caso possiamo estrarre dai tre vettori al massimo un vettore linearmente indipendente. Esso può essere uno qualsiasi dei tre vettori.
2. Se consideriamo $\mathbb{C}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, abbiamo che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che dai tre vettori iniziali possiamo scegliere al massimo due vettori linearmente indipendenti. Essi sono due qualsiasi dei tre.

Si consiglia ora di rifare l'esercizio usando l'algoritmo dato nel secondo paragrafo.

Soluzione dell'esercizio E.4.3 Si potrebbe risolvere l'esercizio determinando esplicitamente i tre polinomi e calcolando il rango della matrice avente come colonne le coordinate dei tre polinomi relative alla base canonica di R^3x .

I calcoli però sarebbero estremamente lunghi.

Conviene invece considerare la base di Lagrange relativa a 1,3 e -1.

In tal caso si eliminano quasi tutti i calcoli. Come?

Capitolo 5

Sottospazi vettoriali

5.1 Introduzione

Riprendiamo un argomento già studiato ampiamente nel corso di Geometria, i sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale.

Ci limiteremo a darne la definizione, a darne qualche esempio e a ricordare alcuni teoremi. Per maggiori dettagli e per ulteriori esercizi si rimanda al testo di geometria.

5.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 5.1 Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V si dice **sottospazio vettoriale** di V (o, più brevemente, sottospazio) se:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + \mathbf{v} &\in E \text{ per ogni } \mathbf{u} \in E, \mathbf{v} \in E \\ k\mathbf{u} &\in E \text{ per ogni } k \in \mathbb{R}, \mathbf{u} \in E.\end{aligned}\quad \Delta$$

Se E è un sottospazio vettoriale di V , allora le operazioni di V inducono in E un'operazione di addizione di vettori e un'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.

Ci chiediamo se E , rispetto a queste operazioni, sia uno spazio vettoriale.

Per verificare ciò dobbiamo verificare se sono valide tutte le proprietà di uno spazio vettoriale. La proprietà 1. (proprietà associativa) è verificata. Infatti, se abbiamo tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di E è chiaro che si ha $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ perché ciò è vero in tutto V . Lo stesso ragionamento può applicarsi per tutte le altre proprietà escluse due proprietà che richiedono po' di attenzione: l'esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione e l'esistenza dell'opposto. Sappiamo infatti che in V esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$: a maggior ragione si avrà $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in E$. Non sappiamo però a priori se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene esso stesso ad E . Allo stesso modo, dato un vettore $\mathbf{u} \in E$, dal momento che questo vettore è un vettore di V , esiste in V il vettore opposto di $\mathbf{u}$, ma non sappiamo a priori se $-\mathbf{u}$ appartiene ad E . In realtà queste due proprietà (esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto) sono automaticamente soddisfatte in un sottospazio vettoriale, come risulta dal seguente:

Teorema 5.2 *Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V allora $\mathbf{0} \in E$ e, per ogni vettore $\mathbf{u}$ di E , il vettore $-\mathbf{u}$ appartiene ad E . Dunque E è esso stesso uno spazio vettoriale (e ciò giustifica il nome di sottospazio).*

DIMOSTRAZIONE Vogliamo mostrare che $\mathbf{0} \in E$. Sappiamo che se k è un numero reale e se $\mathbf{v}$ è un vettore di E si ha che $k\mathbf{v}$ appartiene ad E . In particolare ciò è vero se prendiamo come scalare k il numero 0 e come vettore $\mathbf{v}$ un qualsiasi vettore di E (che è non vuoto, per definizione di sottospazio vettoriale). Dunque $0\mathbf{v} \in E$, ma $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{0} \in E$.

Vogliamo ora mostrare che se $\mathbf{u}$ è un vettore di E allora $-\mathbf{u}$ appartiene anch'esso ad E . Come prima, sappiamo che $k\mathbf{u}$ appartiene ad E qualunque sia k : in particolare $(-1)\mathbf{u}$ appartiene ad E . Poiché $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ abbiamo il nostro risultato. ■

Nella dimostrazione di questo teorema abbiamo mostrato che l'elemento neutro della addizione di E è necessariamente lo stesso elemento neutro della addizione di V . Abbiamo dunque la seguente osservazione, banale, ma molto utile:

Osservazione 5.3 Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore $\mathbf{0}$ allora E non è un sottospazio vettoriale di V . Δ

Notiamo che in generale, dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V per mostrare che E è uno spazio vettoriale dobbiamo innanzitutto mostrare che E non è vuoto: invece di far ciò possiamo semplicemente verificare se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene ad E . Se infatti $\mathbf{0}$ appartiene ad E , allora E è sicuramente non vuoto, e possiamo quindi passare a verificare le altre proprietà. Se, invece, $\mathbf{0}$ non appartiene ad E , non è detto che E sia vuoto (E potrebbe contenere dei vettori diversi dal vettore nullo): sicuramente, però possiamo affermare che E non è un sottospazio vettoriale.

Esempio 5.4 Dato un qualsiasi spazio vettoriale V il sottoinsieme $\{\mathbf{0}\}$ di V formato dal solo vettore nullo è ovviamente un sottospazio vettoriale di V . Lo spazio vettoriale V è inoltre un sottospazio vettoriale di se stesso. Questi due sottospazi vettoriali di V sono detti **sottospazi banali**. Δ

Esempio 5.5 Sottospazi vettoriali di $V^2(\pi, O)$.

L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo.

Sia ora V un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Sia $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ una sua base. Quindi $\mathbf{v}$ è un vettore non nullo. Il sottospazio V è dato dai vettori $k\mathbf{v}$ al variare di k in R . Esso è quindi dato dai vettori appartenenti alla retta passante per O e per P . Viceversa, l'insieme di tutti i vettori appartenenti ad una retta passante per O è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 2 è lo spazio $V^2(\pi, O)$. Δ

Esempio 5.6 Sottospazi vettoriali di $V^3(O)$.

I sottospazi di dimensione 0 e 1 sono, rispettivamente, il vettore nullo e le rette passanti per O . Si lascia come esercizio la dimostrazione che i sottospazi di dimensione 2 sono i piani passanti per O . Δ

Esercizio di base EB.5.1 Dato un campo K , sia $D_K(n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici diagonali. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione. Δ

Esercizio di base EB.5.2 Dato un campo K , sia $T^K(n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici triangolari superiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione. $\triangle$

Esercizio di base EB.5.3 Dato un campo K , sia $S(K, n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici simmetriche. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione. $\triangle$

Teorema 5.7 Sia dato un sistema omogeneo SO di p equazioni in q incognite a coefficienti in un campo K . Si ha cioè:

$$SO : AX = 0$$

dove $A \in M(K, p, q)$ è la matrice dei coefficienti del sistema e X è la matrice a q righe e 1 colonna delle incognite. L'insieme $Sol(SO)$ delle soluzioni di SO è un sottospazio vettoriale di K^q avente dimensione uguale a $q - \text{rk}(A)$.

DIMOSTRAZIONE • Notiamo innanzitutto che $Sol(SO) \neq \emptyset$, infatti $K^q \ni 0 \in Sol(SO)$

- Dimostriamo ora la chiusura rispetto all'addizione. Siano Y e Y' due soluzioni di SO . Dobbiamo dimostrare che $Y + Y'$ è una soluzione del sistema. Poiché Y e Y' sono soluzioni, abbiamo $AY = AY' = 0$. Dobbiamo dimostrare che si ha $A(Y + Y') = 0$.

$$\text{Abbiamo } A(Y + Y') = AY + AY' = 0 + 0 = 0.$$

- In modo analogo si dimostra la chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Lasciamo ciò per esercizio.

Abbiamo dimostrato che $Sol(SO)$ è un sottospazio vettoriale.

Per calcolarne la dimensione, rivedere il teorema di Rouché-Capelli, studiato nel corso di Geometria. $\blacksquare$

Teorema 5.8 Sia V uno spazio vettoriale su un campo K . Dati r vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ di V , abbiamo indicato con $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari. Allora:

- 1) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ di V è un sottospazio vettoriale di V .
- 2) Se W è un sottospazio vettoriale contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$, allora W contiene $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Definizione 5.9 Dalla definizione di $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ segue che i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ generano $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$.

Per questa ragione $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r \rangle$ viene detto **sottospazio vettoriale generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$. $\triangle$

5.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.1 Dimostriamo che $D_K(n)$ è un sottospazio vettoriale.

- La matrice nulla è ovviamente una matrice diagonale.

- La somma di due matrici diagonali è diagonale (dimostrarlo).
- La moltiplicazione di una matrice diagonale per uno scalare è una matrice diagonale.

Una base di $D_K(n)$ è data dalle matrici $A(i, i)$ (sono le matrici avente tutti gli elementi nulli fuorchè un elemento della diagonale principale che è uguale a 1).

Ne segue che la dimensione di $D_K(n)$ è uguale a n .

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.2 L'insieme $T^K(n)$ delle matrici triangolari superiori è dato dalle matrici $A = (a_{ij})$ tali che, se $i < j$, allora $a_{ij} = 0$. Sfruttiamo questa osservazione per dimostrare che $T^K(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$.

- La matrice nulla O appartiene ovviamente a $T^K(n)$.
- Dimostriamo ora la chiusura di $T^K(n)$ rispetto alla addizione. Sia $A \in T^K(n)$ e $B \in T^K(n)$.
Posto quindi $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, per ogni $i < j$ si ha $a_{ij} = b_{ij} = 0$. Dobbiamo dimostrare che, posto, $A + B = C = (c_{ij})$, per ogni $i < j$ si ha $c_{ij} = 0$.
Ciò deriva dal fatto che, per ogni i e j si ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- In modo analogo si dimostra la chiusura di $T^K(n)$ rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Per calcolare la dimensione di $T^K(n)$, cerchiamone una base.

Si verifica facilmente (farlo) che le matrici $A(i, j)$ con $i \leq j$ formano una base di $T^K(n)$. Dobbiamo quindi contare il numero di tali matrici.

Osserviamo che ne esistono n del tipo $A(1, j)$. Sono le matrici

$$A(1, 1), A(1, 2), \dots, A(1, n)$$

Le matrici del tipo $A(2, j)$ sono $n - 1$. Sono le matrici

$$A(2, 2), A(2, 3), \dots, A(2, n)$$

E così via fino all' unica matrice di tipo $A(n, j)$, la matrice $A(n, n)$.

Pertanto la dimensione di $T^K(n)$ è uguale a $S = 1 + 2 + \dots + n$.

Per calcolare S osserviamo la seguente tabella:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

Sommiamo tutti i numeri che compaiono in questa tabella.

La somma degli elementi di ognuna delle due righe è uguale a S .

La somma delle elementi di ognuna delle n colonne è evidentemente uguale a $n + 1$.

Abbiamo pertanto $2S = n(n + 1)$. Segue che si ha

$$\dim T^K(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.3 Osserviamo che $A = (a_{ij})$ è una matrice simmetrica se e solo se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i e j .

La dimostrazione che $S(K, n)$ è un sottospazio vettoriale è analoga a quella svolta per $T^K(n)$.

Una base di $S(K, n)$ è data dalle matrici $A(i, i)$ per $i = 1, \dots, n$ e $B(i, j)$ per $i < j$, dove $B(i, j) = A(i, j) + A(j, i)$. Dimostrare ciò. Pertanto

$$\dim S(K, n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

5.4 Esercizi

Esercizio E.5.1 Dato un campo K , sia $T_K(n)$ il sottoinsieme di $M(K, n, n)$ delle matrici triangolari inferiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ e determinarne la dimensione.

Esercizio E.5.2 Siano $x_1, \dots, x_n$ numeri reali distinti e sia $m \geq n$. Sia:

$$V = \{p(x) \in R^m[x] \mid p(x_1) = \dots = p(x_n) = 0\}.$$

Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $R^m[x]$ di dimensione uguale a $m - n$.

5.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.5.1 La dimostrazione che $T_K(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(K, n, n)$ è analoga a quella vista per $T^K(n)$.

In modo analogo al caso di $T^K(n)$ si dimostra che si ha:

$$\dim T_K(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio E.5.2 SUGGERIMENTO. Scegliere $m - n$ numeri reali $x_{n+1}, \dots, x_m$ distinti tra loro e distinti da $x_1, \dots, x_n$ e utilizzare la base di Lagrange relativa ai valori $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m$.

Capitolo 6

Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

6.1 Introduzione

Ricordiamo le definizioni di intersezione e somma di due sottospazi vettoriali. Anche in questo caso rimandiamo al testo di geometria per maggiori dettagli e per più esercizi. Daremo la dimostrazione della formula di Grassman che lega le dimensioni dei sottospazi intersezione e somma.

6.2 Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

Teorema 6.1 *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Allora $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale di E .*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 6.2 *Dato uno spazio vettoriale E su un campo K , siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Sia:*

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

Allora:

- 1) $V + W$ è un sottospazio vettoriale di E . Esso viene detto **sottospazio somma** di V e W .
- 2) $V \subseteq V + W$, $W \subseteq V + W$
- 3) Se U è un sottospazio vettoriale di E tale che $V \subseteq U$ e $W \subseteq U$, allora si ha $V + W \subseteq U$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esempio 6.3 Si consideri lo spazio vettoriale $R^5[x]$ dei polinomi di grado minore di 5. Sia V il suo sottospazio vettoriale avente come base:

$$\{p_1(x) = 1 + x + x^2 + 3x^4, p_2(x) = 1 + x + 2x^4\}$$

Sia W il sottospazio avente come base:

$$\{p_3(x) = 2 + 2x^4, p_4(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^4\}$$

Vogliamo determinare una base per $V + W$ e una base di $V \cap W$.

Cerchiamo innanzitutto una base per $V + W$. Dimostriamo innanzitutto che $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ è un insieme di generatori di $V + W$. Sia infatti $p(x) \in V + W$, allora $p(x) = q(x) + r(x)$ con $q(x) \in V$ e $r(x) \in W$. Ma $q(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$ e $r(x) = b_3p_3(x) + b_4p_4(x)$. Da cui segue immediatamente che $p(x)$ è combinazione lineare dei quattro vettori. Tali vettori sono quindi generatori di $V + W$. Per estrarre da essi una base dobbiamo estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Per fare ciò sfruttiamo il teorema 4.5. Consideriamo una base di $R^5[x]$, per esempio la base canonica, e consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei quattro vettori. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che A ha rango uguale a 3. Si ha quindi:

$$\dim(V + W) = \text{rk}(A)$$

Il minore formato dalle prime tre righe e prime tre colonne è invertibile. I primi tre vettori formano quindi una base di $V + W$.

Vogliamo ora determinare una base di $V \cap W$. A tale scopo cerchiamo i vettori $p(x) \in V \cap W$. Si ha:

$$p(x) \in V \implies p(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$$

$$p(x) \in W \implies p(x) = b_3p_3(x) + b_4p_4(x)$$

Da cui, avendo posto $a_3 = -b_3$ e $a_4 = -b_4$, si ottiene:

$$a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) + a_4p_4(x) = 0$$

Abbiamo quindi un'equazione vettoriale nelle incognite $a_1, \dots, a_4$. Se si passa dall'equazione vettoriale alle equazioni con le coordinate dei vettori relative alla base canonica, si ottiene un sistema omogeneo di 5 equazioni in 4 incognite. La matrice dei coefficienti non è altro che la matrice A . L'insieme delle soluzioni ha quindi dimensione uguale a $4 - \text{rk}(A) = 1$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a_1 = t, a_2 = t, a_3 = -\frac{1}{2}t, a_4 = -t$$

e i vettori di $V \cap W$ sono del tipo:

$$p(x) = tp_1(x) + tp_2(x) = t(2 + 2x + x^2 + 5x^4)$$

ed una sua base è data dal vettore $2 + 2x + x^2 + 5x^4$. Notiamo che si ha:

$$\dim(V \cap W) = 4 - \text{rango}(A).$$

Nota 6.4 Nell'esempio precedente abbiamo trovato una base di $V + W$ cercando un minore di ordine 3 invertibile.

Osserviamo che di minori siffatti non ve ne è più di uno. Per esempio, anche il minore formato dalle prime tre righe e dalle ultime tre colonne è invertibile. Un'altra base di $V + W$ è data quindi dagli ultimi tre vettori. $\triangle$

Teorema 6.5 Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K . Siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Si ha la **formula di Grassman**¹

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione ricalca il procedimento utilizzato nell'esempio 6.3. Ne diamo quindi rapidi cenni, lasciando i particolari come esercizio.

Si fissa una base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ dello spazio E . Si fissa una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ di V e una base $\{\mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ di W . Si considera la matrice A avente come colonne le coordinate, relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ di V , dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$. Si ha $\dim(V + W) = \text{rango}(A)$. Si determina ora una base di $V \cap W$ con il procedimento utilizzato nell'esempio 6.3. Si ha un sistema omogeneo di n equazioni in $p + q$ incognite in cui A è la matrice dei coefficienti. La dimensione di $(V \cap W)$ è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema. Essa è uguale a $p + q - \text{rango}(A)$. Da cui segue facilmente la tesi. $\blacksquare$

Esercizio di base EB.6.1 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ su $\mathbb{C}$:

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$$

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 = 0\}$$

Determinare basi per $V + W$ e per $V \cap W$. $\triangle$

Nota 6.6 Dalla definizione di $V + W$ segue che ogni vettore di $V + W$ si scrive come $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$. Tale scrittura può NON essere unica. Si consideri infatti l'esempio 6.3. Dato infatti il vettore $q(x) = x + x^4$, si ha $q(x) = -p_1(x) + p_4(x)$. Considerato poi un qualsiasi vettore $p(x) \in V \cap W$, si ha:

$$q(x) = (-p_1(x) + p(x)) + (-p(x) + p_4(x))$$

Notiamo che si ha $-p_1(x) + p(x) \in V$ e $-p(x) + p_4(x) \in W$.

Prendendo quindi, per esempio, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, otteniamo una seconda scrittura di $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= [-p_1(x) + p(x)] + [-p(x) + p_4(x)] = \\ &= [-p_1(x) + p_1(x) + p_2(x)] + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] = \\ &= p_2(x) + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] \end{aligned}$$

¹Hermann Günther Grassman, (1809,1877), matematico e indianista tedesco.

6.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.6.1 Si determina innanzitutto una base per V e una base per W .

Si verifica facilmente che

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)\}$$

è una base di V .

Si verifica facilmente che

$$\{\mathbf{v}_3 = (1, i, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 1)\}$$

è una base di W . Sia A la matrice avente come colonne le coordinate, relative alla base canonica di $\mathbb{C}^3$, dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Si ha $\text{rk}(A) = 3$ e quindi $\dim(V + W) = 3$. Pertanto $V + W = \mathbb{C}^3$ e quindi una base di $V + W$ è la base canonica di $\mathbb{C}^3$.

Dalla formula di Grassman segue $\dim(V \cap W) = 1$.

Per determinarne una base potremmo seguire il procedimento visto in 6.3. Usiamo però un altro metodo. I vettori (z_1, z_2, z_3) appartenenti a $V \cap W$ sono tutti e soli i vettori verificanti il sistema:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 &= 0 \\ z_1 + iz_2 &= 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli (farlo!) otteniamo le soluzioni del sistema

$$\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \right) t, \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \right) t, t \right) \mid t \in \mathbb{C}$$

Otteniamo una base di $V \cap W$ ponendo $t = 1$. Pertanto

$$\left\{ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 1 \right) \right\}$$

è una base di $V \cap W$.

6.4 Esercizi

Esercizio E.6.1 In $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ considerare i sottospazi vettoriali $S(\mathbb{R}, 2)$ e $T^{\mathbb{R}}(2)$. Determinare una base di $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2)$ e una base di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Esercizio E.6.2 In $M(\mathbb{R}, n, n)$ considerare i sottospazi vettoriali $S(\mathbb{R}, n)$ e $T^{\mathbb{R}}(n)$. Determinare una base di $S(\mathbb{R}, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ e una base di $S(\mathbb{R}, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$.

Esercizio E.6.3 Sia dato uno spazio vettoriale E di dimensione 3 su un campo K . Siano V e W due suoi sottospazi vettoriali aventi ambedue dimensione uguale a 2. Cosa si può dire per la dimensione di $V + W$ e per la dimensione di $V \cap W$?

Esercizio E.6.4 Dimostrare, sfruttando la formula di Grassman, la seguente proprietà di geometria: se due piani hanno almeno un punto di intersezione, allora o essi coincidono o hanno come intersezione una retta.

Esercizio E.6.5 Dimostrare il seguente teorema. Dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita, se V e W sono due suoi sottospazi vettoriali tali che $\dim(V + W) = \dim(W)$, allora si ha $V \subseteq W$.

6.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.6.1 Per risolvere questo esercizio si potrebbe fissare una base per ognuno dei due sottospazi e poi procedere come nell'esempio 6.3. In questo caso però vi è una strada più veloce. Sappiamo infatti che si ha $\dim S(\mathbb{R}, 2) = 3$ e che esistono matrici triangolari superiori che non sono simmetriche. Ma allora $\dim(S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2)) > 3$ e quindi $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2) = 4$. Ne segue che una base di $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2)$ è la base canonica di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$. Dalla formula di Grassman segue $\dim(S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)) = 2$. Per determinare una base dell'intersezione dobbiamo quindi determinare due vettori linearmente indipendenti di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Osserviamo che le matrici

$$A(1, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono entrambe simmetriche e triangolari superiori. Essendo linearmente indipendenti formano una base di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Soluzione dell'esercizio E.6.2 Consideriamo innanzitutto $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$.

In EB.5.3 abbiamo visto che una base di $S(\mathbb{R}, n, n)$ è data dalla matrici $A(i, i)$, con $i = 1, \dots, n$ e $B(i, j) = A(i, j) + A(j, i)$ con $i < j$.

In EB.5.2 abbiamo visto che una base di $T^{\mathbb{R}}(n)$ è data dalla matrici $A(i, j)$ con $i \leq j$. L'insieme di tutte le matrici appartenenti a queste due basi è un insieme di generatori di $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ è data dalla matrici $A(i, i)$.

Si verifica facilmente (farlo) che tutte le matrici $A(i, j)$ della base canonica di $M(\mathbb{R}, n, n)$ si ottengono come combinazioni lineari delle matrici delle due basi. Ne segue che $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ coincide con $M(\mathbb{R}, n, n)$. Una sua base è quindi data dalla base canonica di $M(\mathbb{R}, n, n)$.

Consideriamo ora $S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$.

Osserviamo che, se $A = (a_{ij}) \in S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$ allora, per ogni $i > j$ si ha $a_{ij} = 0$ (perché $A \in T^{\mathbb{R}}(n)$).

Ma allora, poiché $A \in S(\mathbb{R}, n, n)$, si ha $a_{ij} = a_{ji}$ e quindi $a_{ji} = 0$ per $i > j$. Cambiando il nome degli indici, si ha quindi $a_{ij} = 0$ per $i < j$.

Pertanto, per ogni $i \neq j$ si ha $a_{ij} = 0$. Quindi $S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n) = D(\mathbb{R}, n)$.

Per chi si fosse perso in questa sarabanda di indici, esprimiamo a parole ciò che abbiamo appena detto.

Ogni matrice dell'intersezione, poiché appartiene a $T^{\mathbb{R}}(n)$ ha tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale uguali a 0. D'altronde anche gli elementi che si trovano sopra la diagonale principale, essendo uguali a elementi che si trovano sotto la diagonale principale, sono uguali a 0. Ne segue che tutti gli elementi che non si trovano sulla diagonale principale sono uguali a 0.

Per inciso, notiamo che, applicando la formula di Grassman, si può seguire una diversa strada per risolvere l'esercizio.

Infatti, una volta che si è visto che si ha:

$$S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n) = D(\mathbb{R}, n)$$

si può determinare la dimensione di $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ con la formula di Grassman:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)) = \dim S(\mathbb{R}, n, n) + \dim T^{\mathbb{R}}(n) - \dim S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$$

e quindi

$$\dim(S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

Pertanto

$$S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = M(\mathbb{R}, n, n)$$

Soluzione dell'esercizio E.6.3 Osserviamo, che poiché si ha $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim E = 3$ si ha $\dim(V + W) = 3$ oppure $\dim(V + W) = 2$.

Se $\dim(V + W) = 3$, allora $V + W = E$ e $\dim(V \cap W) = 1$. Se $\dim(V + W) = 2$, allora $V + W = V$ e $V + W = W$. Da ciò segue $V = W$ e quindi $V \cap W = V = W$.

Soluzione dell'esercizio E.6.4 Indicato con O un punto di intersezione dei due piani, consideriamo lo spazio vettoriale $V^3(O)$. I due piani sono allora sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $V^3(O)$. Il sottospazio somma ha dimensione uguale a 2 o a 3. Dal calcolo della dimensione del sottospazio intersezione segue allora la tesi.

Soluzione dell'esercizio E.6.5 Sappiamo che, dati comunque V e W , si ha sempre $V \subseteq V + W$ e $W \subseteq V + W$.

Nel nostro caso da $\dim W = \dim(V + W)$ segue allora $W = V + W$. E quindi $V \subseteq W$.

Capitolo 7

Somma diretta di sottospazi vettoriali

7.1 Introduzione

Introduciamo un caso particolare di somma di due sottospazi vettoriali: la somma diretta. Anche questo argomento è stato visto nel corso di geometria. Rimandiamo quindi al testo di geometria per ulteriori esempi di somme dirette di due sottospazi vettoriali.

Generalizziamo infine la definizione di somma diretta al caso di un numero finito di sottospazi vettoriali.

7.2 Somma diretta

Definizione 7.1 Sia dato uno spazio vettoriale E . Siano U, V e W suoi sottospazi vettoriali. Il sottospazio vettoriale U si dice **somma diretta** di V e W se si ha:

$$V \cap W = \{\mathbf{0}\} \quad , \quad V + W = U$$

Se U è somma diretta di V e W , si usa il simbolo:

$$U = V \oplus W$$

Teorema 7.2 *Sia dato uno spazio vettoriale E . Siano U, V e W suoi sottospazi vettoriali. Si ha che $U = V \oplus W$ se e solo se ogni vettore $\mathbf{u}$ di U si può scrivere in modo unico come $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$.*

DIMOSTRAZIONE Dimostriamo innanzitutto che, se $U = V \oplus W$, allora ogni vettore di U si scrive in uno ed in solo modo.

Osserviamo innanzitutto che, poiché $U = V + W$, ogni vettore si scrive in almeno un modo come somma di un vettore di V e di un vettore di W .

Dimostriamo che tale scrittura è unica.

Sia $u = v + w = v' + w'$ con $u \in U$, $v \in V, v' \in V, w \in W, w' \in W$.

Ma allora si ha:

$$v - v' = w' - w$$

Poiché V è un sottospazio vettoriale $v - v' \in V$. Poiché W è un sottospazio vettoriale $w' - w \in W$.

Segue quindi $v - v' = w' - w \in V \cap W = \{0\}$. Da cui $v = v'$ e $w = w'$.

Dobbiamo ora dimostrare che, se la scrittura è unica, allora $U = V \oplus W$.

Il fatto che ogni vettore di U si scriva come somma di un vettore di V e di un vettore di W implica $U = V + W$.

Dobbiamo dimostrare che si ha $V \cap W = \{0\}$. Ispirandosi a 6.6 si dimostra (farlo) che, se l'intersezione non fosse formata dal solo vettore nullo, la scrittura non sarebbe unica. ■

Teorema 7.3 *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ una base di V e $\{\mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ una base di W . Allora $V + W = V \oplus W$ se e solo se $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \dots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ è una base di $V + W$.*

DIMOSTRAZIONE Utilizzare la formula di Grassman. ■

Teorema 7.4 *Si ha:*

$$\dim(V \oplus W) = \dim(V) + \dim(W)$$

DIMOSTRAZIONE Ovvio.

Definizione 7.5 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali tali che $E = V \oplus W$. Allora i sottospazi V e W si dicono **supplementari** in E . △

Esempio 7.6 Dato $V^2(\pi, O)$ e due suoi sottospazi r e s di dimensione 1 intersecantisi nel solo punto O (quindi r e s sono due rette passanti per O non coincidenti) si ha $V^2(\pi, O) = r \oplus s$. △

Esempio 7.7 Dato $V^3(O)$, sia r una retta passante per O e π un piano passante per O non contenente la retta r . Si ha: $V^3(O) = r \oplus \pi$. △

Esercizio di base EB.7.1 Si consideri lo spazio vettoriale dei complessi $\mathbb{C}$ sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali. L'insieme $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$. L'insieme $\mathfrak{I}$ dei numeri complessi aventi parte reale nulla è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ (esercizio). Verificare che si ha $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathfrak{I}$. △

Ci chiediamo se, dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita ed un suo sottospazio vettoriale V , esista un supplementare W di V in E .

Studiamo innanzitutto i casi ovvi. Se $V = E$, allora il supplementare di V è il sottospazio nullo.

Viceversa, il supplementare dello spazio nullo è lo spazio E .

Ma cosa si può dire se V è un sottospazio proprio di E ? Vediamo qualche esempio.

Esempio 7.8 Dato $V^2(\pi, O)$, un supplementare di una retta r passante per O è una qualsiasi retta s passante per O non coincidente con r . Notiamo che di tali rette ne esiste più di una. $\triangle$

Esempio 7.9 Consideriamo ora $V^3(O)$ e una retta r passante per O . Un supplementare di r è un qualsiasi piano π passante per O non contenente la retta r . Anche in questo caso vi sono molti supplementari. $\triangle$

Noi vogliamo dimostrare che ogni sottospazio vettoriale è dotato di supplementare. Per fare ciò abbiamo bisogno del seguente teorema.

Teorema 7.10 (del completamento della base) *Sia dato uno spazio vettoriale E con base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$.*

Dati comunque p vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ linearmente indipendenti di E (e quindi $p \leq n$), si possono scegliere $n - p$ vettori tra i vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tali che, aggiunti ai vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$, essi formino una base di E .

DIMOSTRAZIONE Consideriamo la matrice A di ordine $p+n$, n avente le prime p colonne formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ relative alla base scelta in E e le altre n colonne n formate dalle coordinate dei vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ relative alla base scelta in E .

Osserviamo che la il minore di A formato da tutte le n righe di A e dalle ultime n colonne è la matrice identica I . Quindi $\text{rk } A = n$.

D'altronde, poiché i vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ sono linearmente indipendenti, esiste un minore invertibile B di ordine p della matrice A in cui intervengano solo le prime p colonne di A . Dal teorema dell'orlare studiato al primo anno segue che, poiché $\text{rk } A = n$ è possibile aggiungere al minore B le ulteriori $n - p$ righe e $n - p$ colonne scelte tra le ultime n colonne di A in modo tale da ottenere un minore C di A che sia invertibile. Le n colonne della matrice C sono linearmente indipendenti. Sono quindi linearmente indipendenti gli n vettori corrispondenti alle colonne di C . Questi vettori formano la base cercata. $\blacksquare$

Teorema 7.11 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia V un suo sottospazio vettoriale. Allora esiste almeno un supplementare di V in E .*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. Suggerimento: prendere esempio dalla dimostrazione del teorema di completamento di una base. $\blacksquare$

Esempio 7.12 Dato lo spazio vettoriale $R^3[x]$, sia V il suo sottospazio avente come base $\{p(x) = 1 + x + x^2\}$. Vogliamo determinare un supplementare di V . Per fare ciò consideriamo la base canonica di $R^3[x]$ e consideriamo la matrice A avente come prima colonna le coordinate del vettore $p(x)$ e come seconda, terza e quarta colonna le coordinate dei tre vettori della base canonica di $R^3[x]$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il minore formato dalle prime tre colonne è invertibile.

Quindi $\{1 + x + x^2, 1, x\}$ è una base di $R^3[x]$.

Il sottospazio avente come base $\{1, x\}$ è supplementare di V . $\triangle$

Nota 7.13 Osserviamo che, nell'esempio, precedente non vi è un solo supplementare di V .

Per esempio, si può vedere che anche il sottospazio avente come base $\{x, x^2\}$ è supplementare di V . Δ

Definizione 7.14 Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano $V_1, \dots, V_p$ sottospazi vettoriali di E . Si dice che un sottospazio U è **somma diretta** di $V_1, \dots, V_p$, in simboli:

$$U = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$$

se, dato comunque un vettore $\mathbf{u} \in U$, esiste una sola p -upla di vettori $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ con $\mathbf{v}_1 \in V_1, \dots, \mathbf{v}_p \in V_p$ tali che $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_p$. Δ

Nota 7.15 Il teorema 7.2 ci assicura che, nel caso di $p = 2$, quest'ultima definizione di somma diretta coincide con la definizione data in precedenza. Δ

Esempio 7.16 Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ su $\mathbb{R}$.

Si dimostra facilmente (farlo) che i seguenti tre sottoinsiemi:

$$V_1 = \{(a, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}, \quad V_2 = \{(0, b, 0) \mid b \in \mathbb{R}\}, \quad V_3 = \{(0, 0, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$$

sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. Si verifica (farlo) che si ha $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$. Δ

Teorema 7.17 (generalizzazione del teorema 7.3) Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano $V_1, \dots, V_p$ suoi sottospazi vettoriali di dimensione finita. Sia: $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}\}$ una base di V_1 .

Sia $\{\mathbf{e}_{q_1+1}, \dots, \mathbf{e}_{q_2}\}$ una base di V_2

... e sia infine $\{\mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{e}_{q_p}\}$ una base di V_p .

Allora:

$U = V_1 \oplus \dots \oplus V_p$ se e solo se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{q_1}, \dots, \mathbf{e}_{q_{p-1}+1}, \dots, \mathbf{e}_{q_p}\}$ è una base di U .

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Esercizio di base EB.7.2 Dato lo spazio vettoriale $V^3(O)$ siano r_1, r_2, r_3 tre rette passanti per O non complanari. Si ha $V^3(O) = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$. Δ

7.3 Soluzione degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.1 Usiamo il teorema 7.3.

Il vettore $\mathbf{v}_1 = 1$ è una base di $\mathbb{R}$.

$\mathbf{v}_2 = i$ è una base di $\mathbb{J}$.

Sappiamo che $\{1, i\}$ è una base di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. Pertanto da 7.3 segue $C = \mathbb{R} \oplus \mathbb{J}$.

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.2 Per dimostrare ciò usiamo il teorema 7.17. Sia $P_1 \neq O$ un punto di r_1 . Quindi $\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}\}$ è una base di r_1 . Analogamente, dati $P_2 \in r_2$ e $P_3 \in r_3$ distinti da O , si ha che $\{\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}\}$ e $\{\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP_3}\}$ sono basi di r_2 e r_3 rispettivamente.

I punti O, P_1, P_2, P_3 non sono complanari e quindi:

$$\{\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{OP_1}, \mathbf{v}_2 = \overrightarrow{OP_2}, \mathbf{v}_3 = \overrightarrow{OP_3}\}$$

è una base di $V^3(O)$. Ne segue $V^3(O) = r_1 \oplus r_2 \oplus r_3$.

7.4 Esercizi

Esercizio E.7.1 Sia $S(\mathbb{R}, n)$ il sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ dato dalle matrici simmetriche. Quindi:

$$S(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n, n) | A = {}^t A\}$$

Indichiamo con $AS(\mathbb{R}, n)$ l'insieme delle matrici antisimmetriche. Quindi:

$$AS(\mathbb{R}, n) = \{A \in M(\mathbb{R}, n, n) | A = -{}^t A\}$$

Dimostrare che $AS(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ e che si ha:

$$M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) \oplus AS(\mathbb{R}, n)$$

SUGGERIMENTO. Notare che, per ogni matrice $A \in M(R, n, n)$, si ha

$$A + {}^t A \in S(R, n), \quad A - {}^t A \in AS(R, n)$$

e che

$$2A = A + {}^t A + A - {}^t A$$

Esercizio E.7.2 Determinare quali condizioni bisogna assegnare ad un campo K perché si abbia:

$$M(K, n, n) = S(K, n) \oplus AS(K, n)$$

Esercizio E.7.3 Fissato il campo $\mathbb{Z}_2$, si considerino i sottospazi vettoriali di $M(\mathbb{Z}_2, n, n)$ dati da $S(\mathbb{Z}_2, n)$ e $AS(\mathbb{Z}_2, n)$. Determinare $S(\mathbb{Z}_2, n) + AS(\mathbb{Z}_2, n)$ e $S(\mathbb{Z}_2, n) \cap AS(\mathbb{Z}_2, n)$.

Esercizio E.7.4 Considerare lo spazio vettoriale $R^4[x]$. Sia V il suo sottospazio vettoriale dato da:

$$V = \{p(x) \in R^4[x] \mid p(1) = p(5) = 0\}$$

Determinare un supplementare di V .

Esercizio E.7.5 Determinare tre sottospazi vettoriali non nulli V_1, V_2, V_3 di R^5 tali che si abbia $R^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$.

7.5 Soluzione degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.7.1 La dimostrazione che $AS(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$ è analoga alla dimostrazione che $S(\mathbb{R}, n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, n, n)$, pertanto la omettiamo. In ogni caso consigliamo di farla.

Si dimostra (farlo) che le matrici $C(i, j) = A(i, j) - A(j, i)$ con $i < j$ formano una base di $AS(\mathbb{R}, n)$. Quindi

$$\dim AS(\mathbb{R}, n) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Dobbiamo ora dimostrare che si ha:

$$M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) \oplus AS(\mathbb{R}, n)$$

Osserviamo che per ogni matrice $A \in M(\mathbb{R}, n, n)$ si ha:

$$A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A)$$

con $\frac{1}{2}(A + {}^tA) \in S(\mathbb{R}, n)$ e $\frac{1}{2}(A - {}^tA) \in AS(\mathbb{R}, n)$.

Pertanto $M(\mathbb{R}, n, n) = S(\mathbb{R}, n) + AS(\mathbb{R}, n)$.

Dobbiamo ora verificare che si ha $S(\mathbb{R}, n) \cap AS(\mathbb{R}, n) = \{\mathbf{O}\}$.

Si dimostra ciò usando la formula di Grassman:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n) \cap AS(\mathbb{R}, n)) = \dim S(\mathbb{R}, n) + \dim AS(\mathbb{R}, n) - \dim(S(\mathbb{R}, n) + AS(\mathbb{R}, n))$$

quindi:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n) \cap AS(\mathbb{R}, n)) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} - n^2 = 0$$

Soluzione dell'esercizio E.7.2 Osserviamo che nella dimostrazione precedente abbiamo considerato $\frac{1}{2}$.

Il problema è capire cosa sia, in un campo $\mathbb{K}$ qualsiasi, l'elemento $\frac{1}{2}$.

Si ha ovviamente $\frac{1}{2} = 2^{-1}$, dove $2 = 1 + 1$, essendo 1 l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione del campo.

Sappiamo che ogni elemento non nullo di un campo è dotato di inverso.

Qui sta il punto: chi ci dice che 2 sia diverso da 0?

Vi è un altro punto delicato: la dimostrazione che le matrici $C(i, j) = A(i, j) - A(j, i)$ con $i < j$ formino una base di $AS(\mathbb{K}, n)$ è valida per ogni campo $\mathbb{K}$?

In effetti se $2 \neq 0$, la dimostrazione rimane valida (perché?). Ma se $2 = 0$ la dimostrazione non è più valida (perché?). Da tutto ciò segue che il teorema rimane vero se nel campo $\mathbb{K}$ si ha $2 \neq 0$.

Ma nel campo $\mathbb{Z}_2$ si ha $2 = 0$.

Nel prossimo esercizio mostriamo che in quest'ultimo caso il teorema non è valido.

Soluzione dell'esercizio E.7.3 In $\mathbb{Z}_2$ si ha $-0 = 0$ e $-1 = 1$, pertanto, per ogni $a \in \mathbb{Z}_2$ si ha $a = -a$.

Segue da ciò $S(\mathbb{Z}_2, n) = AS(\mathbb{Z}_2, n)$.

Pertanto $S(\mathbb{Z}_2, n) + AS(\mathbb{Z}_2, n) = S(\mathbb{Z}_2, n) \cap AS(\mathbb{Z}_2, n) = S(\mathbb{Z}_2, n) = AS(\mathbb{Z}_2, n)$

Soluzione dell'esercizio E.7.4 Si considerino in $\mathbb{R}^4[x]$, due numeri diversi da 1 e 5, per esempio 7 e 9. Si consideri la base di Lagrange $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ relativa a 1, 5, 7, 9. Si ha (esercizio) $V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

Un supplementare di V è quindi $W = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle$.

Soluzione dell'esercizio E.7.5 Si possono determinare i tre sottospazi vettoriali non nulli V_1, V_2, V_3 di $\mathbb{R}^5$ tali che si abbia $\mathbb{R}^5 = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3$ in vari modi.

Fissata una qualsiasi base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5\}$ di $\mathbb{R}^5$, si può, per esempio, fissare

$$V_1 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \quad V_2 = \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \rangle, \quad V_3 = \langle \mathbf{v}_5 \rangle$$

Capitolo 8

Cambio di base

8.1 Introduzione

Sappiamo che, fissata una base finita in uno spazio vettoriale, ad ogni vettore sono associate le coordinate relative a tale base. In questo capitolo vediamo che tali coordinate cambiano quando si cambia la base e mostreremo come.

8.2 Cambio di base

Esempio 8.1 Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3[x]$ e la sua base canonica $\{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = x, \mathbf{e}_2 = x^2\}$.

Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3 + 5x + 8x^2$ relative alla base canonica sono $(3, 5, 8)$. Consideriamo ora i vettori $\{\mathbf{e}'_0 = 1, \mathbf{e}'_1 = 1 + x, \mathbf{e}'_2 = 1 + x + x^2\}$. Osserviamo che essi formano una base. Infatti la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avente come colonne le coordinate di $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$ relative alla base canonica è invertibile. Sappiamo che il vettore $\mathbf{v}$ si può scrivere come combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2$:

$$\mathbf{v} = b'_0 \mathbf{e}'_0 + b'_1 \mathbf{e}'_1 + b'_2 \mathbf{e}'_2$$

Determiniamo b'_0, b'_1, b'_2 .

Abbiamo

$$3 + 5x + 8x^2 = a'_0(1) + b'_1(1 + x) + b'_2(1 + x + x^2) = (a'_0 + a'_1 + a'_2) + (a'_1 + a'_2)x + a'_2x^2$$

e quindi

$$\begin{cases} a'_0 + a'_1 + a'_2 &= 3 \\ a'_1 + a'_2 &= 5 \\ a'_2 &= 8 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema otteniamo

$$\begin{cases} a'_0 &= -2 \\ a'_1 &= -3 \\ a'_2 &= 8 \end{cases}$$

Ne segue che $(-2, -3, 8)$ sono le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ relative alla base $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. Pertanto le coordinate cambiano al variare della base. $\triangle$

Vogliamo determinare come sono legate tra loro tra le coordinate relative a diverse basi di uno stesso vettore.

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha:

$$\mathbf{v} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n$$

Scriviamo, utilizzando il prodotto righe per colonne tra matrici, la formula precedente nel seguente modo:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Notare che si è considerato $(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)$ come una matrice ad una riga e n colonne i cui elementi sono vettori di V .

Consideriamo ora un'altra base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ di V . Si ha:

$$\mathbf{v} = b'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b'_n \mathbf{e}'_n$$

Con il simbolismo compatto:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Vogliamo determinare la relazione intercorrente tra le coordinate

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e le coordinate

$$B' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

relative alla base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$.

Sia M la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Si ha cioè, utilizzando il simbolismo matriciale sopra introdotto:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) M$$

Poiché i vettori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ sono linearmente indipendenti, la matrice M è invertibile. Essa viene chiamata **matrice di passaggio** dalla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$. Dalla formula precedente segue:

$$(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) M^{-1}$$

e quindi la matrice M^{-1} è la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Si ha, sfruttando le formule precedenti:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

Quindi

$$M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

sono le coordinate del vettore $\mathbf{v}$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Per l'unicità delle coordinate relative ad una stessa base si ha:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$B = MB'$$

da cui segue anche:

$$B' = M^{-1}B$$

Queste sono le formule che cercavamo.

Teorema 8.2 (Relazione tra le coordinate) *Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base.*

Fissato un vettore $\mathbf{v}$ di V , sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ciè

$$\mathbf{v} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_n \mathbf{e}_n$$

Consideriamo ora un'altra base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ di V . Sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$\mathbf{v} = b'_1 \mathbf{e}'_1 + \dots + b'_n \mathbf{e}'_n$$

Sia M la matrice di passaggio dalla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ alla base $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, cioè la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Quindi:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) M$$

Allora si ha:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix}$$

cioè:

$$B = MB'$$

da cui segue anche:

$$B' = M^{-1}B$$

Esercizio di base EB.8.1 Si svolga di nuovo l'esempio E.11.5 utilizzando le formule appena trovate. $\triangle$

8.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.8.1 La matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$

$$\{\mathbf{e}_0 = 1, \mathbf{e}_1 = x, \mathbf{e}_2 = x^2\}$$

alla base

$$\{\mathbf{e}'_0 = 1, \mathbf{e}'_1 = 1 + x, \mathbf{e}'_2 = 1 + x + x^2\}$$

è data dalla matrice:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le coordinate del vettore $\mathbf{v} = 3 + 5x + 8x^2$ relative alla base canonica sono $(3, 5, 8)$. Pertanto le coordinate di $\mathbf{v}$ relative alla nuova base base sono:

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

8.4 Esercizi

Esercizio E.8.1 Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la retta $x = y = 2z$ e il piano $x - 2y + z = 0$. Si fissi una base di $\mathbb{R}^3$ formata da un vettore appartenente alla retta e da due vettori appartenenti al piano. Determinare le coordinate di $(3, 5, 1)$ relative a questa base.

Esercizio E.8.2 Si consideri in $\mathbb{R}^3[x]$ la base di Lagrange relativa ai punti 1,2,3. Si determinino le coordinate, relative a questa base di Lagrange, del polinomio $1 + x + 2x^2$.

Esercizio E.8.3 Si consideri in $\mathbb{R}^3[x]$ la base di Lagrange relativa ai punti 1,2,3. Si determinino le coordinate, relative alla base canonica, del polinomio avente $(1, 1, 2)$ come coordinate relative alla base di Lagrange.

Esercizio E.8.4 Si consideri la base $\{1 + i, 3 - i\}$ dello spazio vettoriale $\mathbb{C}$ sui reali. Determinare le coordinate relative a tale base del numero complesso $2 + 7i$.

8.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.8.1 Una base della retta $x = y = 2z$ è data da $\{\mathbf{v}'_1 = (2, 2, 1)\}$.

Una base del piano $x - 2y + z = 0$ è data da $\{\mathbf{v}'_2 = (-1, 0, 1), \mathbf{v}'_3 = (2, ', 0)\}$.

Pertanto le coordinate del vettore $(3, 5, 1)$ relative alla base $\{\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3\}$ sono ...

Soluzione dell'esercizio E.8.2 Per rispondere a questa domanda, volendo, si può determinare esplicitamente la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$ alla base di Lagrange e quindi usare la formula di trasformazione delle coordinate. In questo caso però si può evitare tutto ciò ricordando quali proprietà hanno le coordinate di un polinomio relative ad una base di Lagrange.

Soluzione dell'esercizio E.8.3 Determinare la matrice di passaggio dalla base canonica di $\mathbb{R}^3x$ alla base di Lagrange e quindi usare la formula di trasformazione delle coordinate.

Soluzione dell'esercizio E.8.4 Provare a svolgere l'esercizio sia svolgendo direttamente i calcoli così come si è fatto nel primo esempio del capitolo, sia determinando la matrice di passaggio tra le due basi e applicando quindi la formula di passaggio delle coordinate.

Capitolo 9

Funzioni

9.1 Introduzione

Abbiamo raggruppato in questo capitolo alcune nozioni sulle funzioni che sono stati introdotti nel corso delle lezioni in vari momenti. La maggior parte di queste sono nozioni erano state già introdotte nel corso del primo anno.

9.2 Richiami sulle funzioni

Definizione 9.1 Dati due insiemi A e B , una **funzione** (o **applicazione**) tra A e B è una legge f che associa ad ogni elemento $a \in A$ uno ed un solo elemento di B che viene indicato con $f(a)$. L'elemento $f(a)$ viene detto **immagine** di a attraverso f . Una funzione f tra A e B viene indicata con il simbolo $f : A \longrightarrow B$. L'insieme delle immagini degli elementi di a viene detto **immagine** di f . Esso viene indicato con il simbolo $f(A)$ o con il simbolo $\text{Im}f$. Quindi $f(A) \subset B$. In altre parole:

$$f(A) = \{b \in B \mid \exists a \in A \text{ tale che } f(a) = b\}$$

Dato $b \in B$, chiamiamo **controimmagine** (o **fibra**) di b il sottoinsieme di A dato dagli elementi di A le cui immagini coincidono con b . Tale sottoinsieme di A viene indicato con il simbolo $f^{-1}(b)$. In altre parole:

$$f^{-1}(b) = \{a \in A \mid f(a) = b\}$$

Definizione 9.2 Data una funzione $f : A \longrightarrow B$ e dato $A' \subset A$ chiamiamo **immagine di A'** l'insieme delle immagini degli elementi di A' . Indichiamo questo insieme con il simbolo $f(A')$. Quindi:

$$f(A') = \{b \in B \mid \exists a' \in A' \text{ tale che } f(a') = b\}$$

Possiamo anche definire la **restrizione** della funzione f a A' , che viene indicata con il simbolo $f|_{A'}$ (si dice f **ristretta** ad A'). Essa è la funzione ottenuta considerando la funzione f solo sugli elementi di A' . La funzione $f|_{A'} : A' \longrightarrow B$ è quindi definita

da $f|_{A'}(a') = f(a') \forall a' \in A'$.

Si definisce anche la **funzione inclusione** $i : A' \longrightarrow A$ nel modo seguente $i(a') = a' \forall a' \in A'$ $\triangle$

Definizione 9.3 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **iniettiva** (o **monomorfismo**) se elementi diversi hanno immagini diverse. Cioè:

f iniettiva $\iff (a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$.

O, equivalentemente:

f iniettiva $\iff (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$. $\triangle$

Definizione 9.4 Dato un insieme finito A , indichiamo con $|A|$ il numero di elementi di A . $\triangle$

Esercizio E.9.1 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ iniettiva} \iff \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| \leq 1$$

Definizione 9.5 Una funzione $f : A \longrightarrow B$ si dice **suriettiva** o **surgettiva** o **sopra** (o **epimorfismo**), se si ha $B = f(A)$. $\triangle$

Esercizio E.9.2 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ surgettiva} \iff \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| \geq 1$$

Definizione 9.6 Una funzione si dice **biiettiva** o **biunivoca** se essa è iniettiva e suriettiva. $\triangle$

Esercizio E.9.3 Dimostrare che, data una funzione $f : A \longrightarrow B$, si ha:

$$f \text{ biiettiva} \iff \forall b \in B \ |f^{-1}(b)| = 1$$

Esercizio E.9.4 Sia A l'insieme degli studenti. Consideriamo la funzione $f : A \longrightarrow N \cup \{0\}$ che associa ad ogni studente il numero degli esami del primo anno da lui superati. La funzione f è iniettiva, è surgettiva? Spiegare cosa è $f^{-1}(3)$.

Esercizio E.9.5 Dare un esempio di funzione non iniettiva e non surgettiva.

Dare un esempio di funzione iniettiva e non surgettiva.

Dare un esempio di funzione non iniettiva e surgettiva.

Dare un esempio di funzione iniettiva e surgettiva (cioè biunivoca).

Definizione 9.7 Dato un insieme A la **funzione identica** di A è la funzione $f : A \longrightarrow A$ definita da $f(a) = a \forall a \in A$. Di solito la funzione identica di A viene indicata con il simbolo id_A (o con il simbolo id se non vi sono dubbi sull'insieme su cui opera l'identità) o anche con il simbolo 1_A . $\triangle$

Teorema 9.8 La funzione identica di un insieme A è biunivoca.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Teorema 9.9 Dati $A' \subset A$, la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è iniettiva.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Esercizio E.9.6 Dimostrare che la funzione inclusione $i : A' \longrightarrow A$ è surgettiva se e solo se $A' = A$.

Definizione 9.10 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, esse si dicono **uguali** se si ha:

$$\forall a \in A \quad f(a) = g(a)$$

Nota 9.11 Dalla definizione precedente segue che date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$ sono diverse se esiste $a \in A$ tale che $f(a) \neq g(a)$. $\triangle$

Esercizio E.9.7 Siano date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : A \longrightarrow B$, e sia $C \subset A$ e $C \neq A$.

Verificare la verità o falsità della seguente affermazione:

$$f|_C = g|_C \implies f = g$$

9.3 Composizione di funzioni

Definizione 9.12 Date due funzioni $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, la **funzione composta** è la funzione $g \circ f : A \longrightarrow C$ definita da

$$(g \circ f)(a) = g[f(a)] \quad \forall a \in A$$

Definizione 9.13 Data una funzione biunivoca $f : A \longrightarrow B$, la **funzione inversa** di f è la funzione:

$$f^{-1} : B \longrightarrow A$$

definita da:

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{dove } a \in A \text{ è tale che } f(a) = b.$$

Nota 9.14 Il fatto che la funzione f sia biunivoca assicura che l'elemento a verificante la condizione richiesta esista e sia unico. $\triangle$

Nota 9.15 Attenzione. Con il simbolo $f^{-1}(b)$ si indica sia la controimmagine di b attraverso una *qualsiasi* funzione f sia l'immagine di b attraverso la funzione f^{-1} inversa di una funzione f che sia *biunivoca*. $\triangle$

Teorema 9.16 La funzione inversa f^{-1} di una funzione biunivoca f è essa stessa biunivoca.

DIMOSTRAZIONE . Lasciata per esercizio. ■

Esercizio E.9.8 Sia $f : A \longrightarrow B$ una funzione biunivoca e sia $f^{-1} : B \longrightarrow A$ la sua inversa. Dimostrare che si ha: $f \circ f^{-1} = id_B$ e $f^{-1} \circ f = id_A$.

Capitolo 10

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Riprendiamo un argomento già ampiamente studiato nel corso di Geometria: gli omomorfismi tra spazi vettoriali.

Ci limiteremo a darne la definizione e a darne qualche esempio e a ricordare alcuni teoremi. Per maggiori dettagli e per ulteriori esercizi si rimanda al testo di Geometria.

10.1 Omomorfismi

Definizione 10.1 Dati due spazi vettoriali V e W su uno stesso campo $\mathbb{K}$, un **omomorfismo** tra V e W è una funzione $\eta : V \rightarrow W$ tale che:

$$\eta(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}) + \eta(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{w} \in W$$

$$\eta(k\mathbf{v}) = k\eta(\mathbf{v}) \quad \forall k \in \mathbb{K}, \forall \mathbf{v} \in V$$

In altre parole un omomorfismo tra spazi vettoriali è una funzione che conserva l'operazione di addizione tra vettori e l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. $\triangle$

Esercizio di base EB.10.1 Sia $\eta : M(R, p, q) \rightarrow M(R, q, p)$ l'applicazione definita da

$$\eta(A) = {}^t A \quad \forall A \in M(R, p, q)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali. $\triangle$

Esercizio di base EB.10.2 Data $B \in M(R, p, q)$. Sia $\eta : M(R, q, r) \rightarrow M(R, p, r)$ l'applicazione definita da $\eta(X) = BX$ per ogni $X \in M(R, q, r)$. Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali. $\triangle$

Teorema 10.2 Sia $\eta : E \rightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali. Si ha allora:

$$\eta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$\eta(-\mathbf{v}) = -\eta(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in E$$

DIMOSTRAZIONE Sfruttare il fatto che si ha:

$$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \text{ e } -\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}. \quad \blacksquare$$

Teorema 10.3 Siano $\alpha : E \longrightarrow F$ e $\beta : F \longrightarrow G$ omomorfismi. Allora $\beta \circ \alpha : E \longrightarrow G$ è un omomorfismo.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 10.4 L'immagine di un omomorfismo $\eta : V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di W .

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio.

Definizione 10.5 Dato un omomorfismo tra spazi vettoriali $\eta : V \longrightarrow W$, chiamiamo **nucleo** di η (e lo indichiamo con il simbolo $\ker \eta$), il seguente sottoinsieme di V :

$$\ker \eta = \{\mathbf{v} \in V \mid \eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Teorema 10.6 Il nucleo di un omomorfismo $\eta : V \longrightarrow W$ tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di V .

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio.

Esercizio di base EB.10.3 Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo definito nell'esercizio EB.10.1. △

Teorema 10.7 Un omomorfismo tra spazi vettoriali è iniettivo se e solo se il suo nucleo è formato dal solo vettore nullo.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 10.8 Sia $\eta : V \longrightarrow W$ un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia $\mathbf{v} \in V$ e $\mathbf{w} \in W$ tali che $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Allora:

$$\eta^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} + \ker \eta$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 10.9 Sia $\eta : V \longrightarrow W$ un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ una base di V . Allora $\{\eta(\mathbf{v}_1), \dots, \eta(\mathbf{v}_q)\}$ è un insieme di generatori di $\eta(V)$.

DIMOSTRAZIONE . $\mathbf{w}$ un vettore dell'immagine di η . Esiste quindi un vettore $\mathbf{v} \in V$, tale che si abbia $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ma $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ è una base di V ; quindi, se $\mathbf{v} \in V$, si ha $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \dots + a_q\mathbf{v}_q$. Ma allora, sfruttando il fatto che η è un omomorfismo, segue:

$$\mathbf{w} = \eta(\mathbf{v}) = a_1\eta(\mathbf{v}_1) + \dots + a_q\eta(\mathbf{v}_q)$$

cioè la tesi. ■

10.2 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.10.1 Ricordare che si ha

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(kA) &= k({}^tA) \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.10.2 Ricordare che si ha

$$\begin{aligned} B(A+A') &= BA + BA' \\ B(kA) &= kBA \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.10.3 Si ha $\ker \eta = \{0\}$ e $\eta(M(\mathbb{R}, p, q)) = M(\mathbb{R}, q, p)$.

Pertanto l'omomorfismo η è surgettivo.

10.3 Esercizi

Esercizio E.10.1 Sia $\phi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$ l'applicazione definita da

$$\phi(A) = A + {}^tA \quad \forall A \in M(R, n, n)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Esercizio E.10.2 Sia $\psi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$ l'applicazione definita da

$$\psi(A) = A - {}^tA \quad \forall A \in M(R, n, n)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Esercizio E.10.3 Si consideri l'omomorfismo tra spazi vettoriali:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

definito da:

$$f[(x, y)] = (x, x)$$

Determinare nucleo e immagine di f .

10.4 Soluzioni esercizi

Soluzione dell'esercizio E.10.1 Ricordare che si ha

$$\begin{aligned} {}^t(A+B) &= {}^tA + {}^tB \\ {}^t(kA) &= k({}^tA) \end{aligned}$$

Soluzione dell'esercizio E.10.2 Analoga a quella dell'esercizio precedente.

Soluzione dell'esercizio E.10.3 $\ker f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $f(\mathbb{R}^2) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Capitolo 11

Omomorfismi e matrici

11.1 Introduzione

Nel corso di Geometria è stato visto come associare una matrice ad un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Rimandiamo al testo del corso per esempi e esercizi su ciò.

Il simbolismo compatto introdotto nel capitolo 8 ci permette di scrivere in altro modo formule già introdotte nel corso di geometria.

L'analisi della matrice associata ad un omomorfismo ci permette di avere informazioni sulle dimensioni del nucleo e dell'immagine di un omomorfismo.

Vediamo poi come varia la matrice associata ad un omomorfismo tra due spazi vettoriali al variare delle basi scelte nei due spazi vettoriali.

Vediamo infine la matrice associata alla composizione di omomorfismi.

11.2 Omomorfismi e matrici

Teorema 11.1 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali. Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E . Per ogni vettore*

$$\mathbf{v} = b_1 \mathbf{e}_1 + \dots + b_q \mathbf{e}_q \quad \text{di } E$$

si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = b_1 \eta(\mathbf{e}_1) + \dots + b_q \eta(\mathbf{e}_q)$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Nota 11.2 La formula precedente con simbolismo compatto introdotto diventa:

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\eta(\mathbf{e}_1) \dots \eta(\mathbf{e}_q)) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Osserviamo la formula precedente. Essa ci dice che, per determinare l'immagine attraverso η di un qualsiasi vettore $\mathbf{v}$ basta conoscere le sue coordinate $(b_1, \dots, b_q)$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e le immagini dei vettori di tale base.

Abbiamo pertanto il seguente :

Teorema 11.3 Siano E e F due spazi vettoriali su un campo K . Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E . Siano $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ vettori qualsiasi di F . Allora esiste ed è unico un omomorfismo $\eta : E \longrightarrow F$ tale che si abbia:

$$\eta(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i \quad i = 1, \dots, q$$

Esempio 11.4 Consideriamo lo spazio vettoriale R^2 e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonica di R^2 . Sia W uno spazio vettoriale su R . Siano $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ due vettori di W . L'unico omomorfismo $\eta : R^2 \longrightarrow W$ tale che:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1, \quad \eta(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_2$$

è dato da:

$$\eta[(a, b)] = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Infatti, poiché η deve essere un omomorfismo, si deve avere:

$$\eta[(a, b)] = \eta(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a\eta(\mathbf{e}_1) + b\eta(\mathbf{e}_2) = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Definizione 11.5 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo K . Siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente. Definiamo **matrice associata ad η relativamente alle basi scelte** la matrice $A = (a_{ij}) \in M(K, p, q)$ avente come j -esima colonna le coordinate del vettore $\eta(\mathbf{e}_j)$ relative alla base $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$. Cioè:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{pj}\mathbf{f}_p \quad j = 1, \dots, q$$

Usando il simbolismo compatto, si ha quindi:

$$(\eta(\mathbf{e}_1) \dots \eta(\mathbf{e}_q)) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p)A$$

Esempio 11.6 Si consideri l'omomorfismo $\eta : R^3 \longrightarrow R^2$ definito da $\eta[(x, y, z)] = (z, y)$.

Cerchiamo la matrice associata all'omomorfismo relativamente alle basi canoniche $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ di R^3 e R^2 rispettivamente. Si ha:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \eta[(1, 0, 0)] = (0, 0) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_2) = \eta[(0, 1, 0)] = (0, 1) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_3) = \eta[(0, 0, 1)] = (1, 0) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

La matrice associata a η relativamente alle basi canoniche è quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.11.1 Sia $\eta : M(R, 2, 2) \longrightarrow R^2$ definito da:

$$\eta \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = (a + d, b + c)$$

- i) Dimostrare che η è un omomorfismo tra spazi vettoriali su R .
- ii) Determinare la matrice A associata ad η relativamente alle basi canoniche.

Esercizio E.11.2 Sia $\beta : R^2 \longrightarrow C$ definito da:

$$\beta[(x, y)] = x + (x + y)i$$

- i) Dimostrare che β è un omomorfismo tra spazi vettoriali su R .
- ii) Determinare la matrice B associata a β relativamente alle basi canoniche.

Teorema 11.7 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo K . Siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente e sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Allora, si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta(b_1\mathbf{e}_1 + \dots + b_q\mathbf{e}_q) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p)A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. Basta applicare le formule viste in precedenza. ■

Nota 11.8 Usando il simbolismo compatto la formula precedente diventa:

$$\eta \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p)A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Definizione 11.9 Siano E e F spazi vettoriali su un campo K . Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ una base di F . Sia $A \in M(K, p, q)$. Si definisce **omomorfismo associato ad A relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$** l'omomorfismo definito da:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \dots + a_{pj}\mathbf{f}_p \quad j = 1, \dots, q$$

Esempio 11.10 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'omomorfismo $\eta' : R^3 \longrightarrow R^2$ associato ad A relativamente alle basi canoniche dei due spazi è tale che:

$$\eta'(\mathbf{e}_1) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}, \quad \eta'(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2, \quad \eta'(\mathbf{e}_3) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1$$

Quindi:

$$\eta'[(x, y, z)] = x\eta'(\mathbf{e}_1) + y\eta'(\mathbf{e}_2) + z\eta'(\mathbf{e}_3) = x\mathbf{0} + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_1 = (z, y)$$

Notiamo che l'omomorfismo η' coincide con l'omomorfismo η visto nell'esempio 11.6.Δ

Teorema 11.11 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$. Sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Allora:

- 1) $\dim \eta(E) = \text{rk}(A)$
 - 2) $\dim \text{Ker } \eta = \dim E - \text{rk}(A)$
- da cui:
- 3) $\dim E = \dim \text{Ker } \eta + \dim \eta(E)$

DIMOSTRAZIONE 1) Sappiamo che $\{\eta(\mathbf{e}_1), \dots, \eta(\mathbf{e}_q)\}$ è un insieme di generatori di $\eta(E)$. Per estrarre da questi una base, consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate di tali vettori relative alla base scelta in F . Tale matrice è proprio la matrice A . Dal teorema 4.5 del capitolo 5 segue la tesi.

2) Cerchiamo i vettori $\mathbf{v} \in E$ tali che $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Da cui:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Abbiamo un sistema omogeneo di p equazioni in q incognite. Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione uguale a $q - \text{rango } A$. Da cui la tesi. ■

Nota 11.12 La dimostrazione appena data dà un modo concreto per determinare una base per il nucleo di η e una base per l'immagine di η . △

Esercizio E.11.3 Considerare l'omomorfismo dato in E.11.1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Esercizio E.11.4 Considerare l'omomorfismo dato in E.11.2. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Corollario 11.13 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi basi finite.

Allora $\dim \eta(E) \leq \dim E$.

DIMOSTRAZIONE Applicare la parte 3) del teorema 11.11 ■

Corollario 11.14 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi basi finite.

Sia E' un sottospazio vettoriale di E . Allora $\dim \eta(E') \leq \dim E'$.

DIMOSTRAZIONE Applicare il corollario precedente alla funzione $f|_{E'}$. ■

11.3 Cambio di base

Teorema 11.15 . Siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente e sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Quindi:

$$\eta \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Siano $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_q\}$ e $\{\mathbf{f}'_1, \dots, \mathbf{f}'_p\}$ altre basi di E e di F rispettivamente e sia A' la matrice associata ad η relativamente ad esse. Quindi:

$$\eta \left[(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_q) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}'_1 \dots \mathbf{f}'_p) A' \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}$$

Sia:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_q) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) M$$

Sia:

$$(\mathbf{f}'_1 \dots \mathbf{f}'_p) = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) N$$

Si ha allora:

$$A' = N^{-1} A M$$

DIMOSTRAZIONE Si ha:

$$\begin{aligned} \eta \left[(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_q) \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \right] &= \eta \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \right] = \\ &= (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} = (\mathbf{f}'_1 \dots \mathbf{f}'_p) N^{-1} A M \begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui la tesi. ■

Esercizio E.11.5 Sia $L : S(R, 2) \longrightarrow R^2[x]$ definito da:

$$L(B) = \text{tr } B + (\text{tr}' B)x$$

dove:

$\text{tr } B$ = somma degli elementi della diagonale principale di B ,

$\text{tr}' B$ = somma degli elementi della diagonale secondaria di B .

(Ricordiamo che $S(R, 2)$ è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali).

1) Dimostrare che L è un omomorfismo.

2) Dimostrare che:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $S(R, 2)$.

Questa base viene detta **base canonica** di $S(R, 2)$.

3) Determinare la matrice A associata a L relativamente alla base canonica di $S(R, 2)$ e alla base canonica di $R^2[x]$.

4) Dimostrare che:

$$\left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $S(R, 2)$.

5) Dimostrare che $\{\mathbf{f}_1 = 1 + x, \mathbf{f}_2 = 1 - x\}$ è una base di $R^2[x]$.

6) Determinare la matrice A' associata a L relativamente alle basi date in 4) e 5).

Si suggerisce di rispondere alla domanda 6) in due modi:

- a) determinando direttamente la matrice A' ;
- b) determinando la matrice A' utilizzando la matrice A e il teorema 11.15.

11.4 Composizione di omomorfismi

Teorema 11.16 *Siano E, F, G spazi vettoriali su un campo K aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$, $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$, $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$.*

Sia $\alpha : E \rightarrow F$ un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ la matrice A .

Sia $\beta : F \rightarrow G$ un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ e $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$ la matrice B . Allora l'omomorfismo $\beta \circ \alpha$ ha come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r\}$ la matrice BA .

DIMOSTRAZIONE Poiché A è la matrice associata ad α si ha:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Poiché B è la matrice associata a β , si ha:

$$\beta \left[(\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_r) B \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$$

Ma allora:

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha) \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] &= \beta \left[\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] \right] = \\ &= \beta \left[(\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_r) BA \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da cui la tesi. ■

Esercizio E.11.6 Sia $L' : M(R, 2, 2) \rightarrow S(R, 2)$ definito da:

$$L'(B) = B + {}^t B$$

- 1) Dimostrare che L' è un omomorfismo.
 - 2) Determinare la matrice associata a L' relativamente alle basi canoniche.
 - 3) Dato l'omomorfismo L definito nell'esercizio E.11.5, determinare la matrice associata a $L \circ L'$ relativamente alle basi canoniche.
- Si suggerisce di rispondere alla domanda 3) in due modi:
- a) determinando direttamente la matrice associata;
 - b) determinando la matrice associata utilizzando il teorema 11.16 e le matrici associate a L e a L' relativamente alle basi canoniche che sono state calcolate in precedenza.

Esercizio E.11.7 Determinare basi per il nucleo e l'immagine degli omomorfismi $L, L', L \circ L'$ definiti negli esercizi E.11.5 e E.11.6.

Esercizio E.11.8 Sia $\gamma = \beta \circ \eta$ dove η e β sono gli omomorfismi definiti negli esercizi E.11.1 e E.11.2.

- i) Determinare la matrice C associata ad γ relativamente alle basi canoniche.
- ii) Determinare nucleo e immagine di γ .

Teorema 11.17 Siano $A \in M(K, p, q)$ e $B \in M(K, r, p)$. Allora:

$$\text{rk}(BA) \leq \text{rk}(A) \quad , \quad \text{rk}(BA) \leq \text{rk}(B)$$

DIMOSTRAZIONE Diamo solo alcuni suggerimenti lasciando la dimostrazione completa come esercizio.

Si considerino gli omomorfismi $\alpha : K^q \longrightarrow K^p$ e $\beta : K^p \longrightarrow K^r$ associati rispettivamente alle matrici A e B relativamente alle base canoniche dei tre spazi vettoriali.

Si ha

$$\text{rk } A = \dim \alpha(K^q) \quad , \quad \text{rk } B = \dim \beta(K^p) \quad , \quad \text{rk } BA = \dim (\beta \circ \alpha)(K^q)$$

Notiamo poi che $(\beta \circ \alpha)(K^q) \subset \beta(K^p)$ e quindi $\text{rk } BA \leq \text{rk } B$.

Inoltre $(\beta \circ \alpha)(K^q) \subset \beta(\alpha(K^q))$ e quindi dal teorema 11.14 segue $\text{rk } BA \leq \text{rk } A$. ■

Esercizio E.11.9 Determinare due matrici A e B tali che:

$$\text{rk}(BA) < \text{rk}(A) \quad , \quad \text{rk}(BA) < \text{rk}(B)$$

Esercizio E.11.10 Sia $A \in M(K, m, n)$ e $B \in M(K, r, m)$ e sia $\text{rk}(A) = m$. Dimostrare che allora si ha $\text{rk}(BA) = \text{rk}(B)$.

Suggerimento. Pensare le matrici come omomorfismi. Uno di essi è surgettivo.

Capitolo 12

Isomorfismi

12.1 Introduzione

Richiamiamo la definizione di isomorfismo tra spazi vettoriali e alcune sue proprietà. Anche questo è un argomento già introdotto nel corso di geometria. Rimandiamo quindi a quest'ultimo per ulteriori esempi e esercizi.

12.2 Isomorfismi tra spazi vettoriali

Definizione 12.1 Un **isomorfismo** tra spazi vettoriali è un omomorfismo tra spazi vettoriali che sia una corrispondenza biunivoca. Due spazi vettoriali per i quali esista un isomorfismo tra essi si dicono **isomorfi**. Δ

Esercizio E.12.1 Si consideri l'applicazione $\eta : R^2[x] \longrightarrow R^2$ definita da

$$\eta(a + bx) = (a, b)$$

Dimostrare che è un isomorfismo.

Esercizio E.12.2 Dimostrare che lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ dei vettori di un piano π applicati in un suo punto O è isomorfo allo spazio vettoriale R^2 .

Suggerimento. Si consideri una base di $V^2(\pi, O)$.

Esercizio E.12.3 Dimostrare che lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un punto O è isomorfo allo spazio vettoriale R^3 .

Suggerimento. Si consideri una base di $V^3(O)$.

Teorema 12.2 *Se due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione allora essi sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE . Siano V e W spazi vettoriali su un campo K . Supponiamo che essi abbiano dimensione uguale a n .

Sia $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V .

Sia $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ una base di W .

Sia:

$$f : V \longrightarrow W$$

definita da:

$$f(a_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + a_n \mathbf{v}_n) = a_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + a_n \mathbf{w}_n$$

Si verifica facilmente che f è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

Nota 12.3 Da ciò segue che, se V è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n su un campo K , allora V è isomorfo a K^n . $\triangle$

Il seguente teorema è l'inverso del teorema 12.2.

Teorema 12.4 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e se W è uno spazio vettoriale isomorfo a V , allora le dimensioni di V e W sono uguali.*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. $\blacksquare$

Esercizio E.12.4 Si segua la dimostrazione del teorema 12.2 per definire un isomorfismo tra $R^2[x]$ e R^2 utilizzando le basi canoniche di ambedue gli spazi. Notare che l'isomorfismo che si ottiene non è altro che l'isomorfismo assegnato nell'esercizio E.12.1.

Esercizio E.12.5 Si segua la dimostrazione del teorema 12.2 per definire un isomorfismo tra $R^2[x]$ e R^2 utilizzando per $R^2[x]$ la base di Lagrange associata ai punti 0 e 1 e per R^2 la base canonica. Notare che l'isomorfismo che si ottiene è diverso da quello ottenuto nell'esercizio precedente.

Nota 12.5 Per definire un isomorfismo tra spazi vettoriali aventi la stessa dimensione si è fatto ricorso alle basi degli spazi vettoriali. Cambiando base cambia l'isomorfismo (vedere esercizio precedente). Per questa ragione l'isomorfismo si dice **non canonico**. $\triangle$

Teorema 12.6 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K di dimensione finita aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q\}$. Sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. L'omomorfismo η è un isomorfismo se e solo se la matrice A è invertibile. Inoltre, se η è un isomorfismo, la matrice associata all'isomorfismo η^{-1} relativamente alle basi date è la matrice A^{-1} .*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. $\blacksquare$

Esercizio E.12.6 Dimostrare i seguenti teoremi:

- 1) $A \in M(K, p, q)$ e $B \in GL(K, p) \implies \text{rk } BA = \text{rk } A$
- 2) $A \in GL(K, q)$ e $B \in GL(K, r, q) \implies \text{rk } BA = \text{rk } B$

Suggerimento. In 1) pensare A come un omomorfismo e B come un isomorfismo. In 2) viceversa.

Capitolo 13

Spazio degli omomorfismi

13.1 Introduzione

Ecco un argomento totalmente nuovo.

Abbiamo visto che ad ogni omomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione finita possiamo associare una matrice e viceversa.

Abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli omomorfismi tra due spazi vettoriali e lo spazio vettoriale delle matrici.

Introduciamo ora una struttura di spazio vettoriale all'insieme degli omomorfismi. In tal modo abbiamo un isomorfismo tra lo spazio vettoriale degli omomorfismi e lo spazio vettoriale delle matrici.

In virtù di questo isomorfismo possiamo determinare alcune proprietà degli omomorfismi leggendole come proprietà delle matrici.

13.2 Spazio degli omomorfismi

Definizione 13.1 Siano E e F spazi vettoriali su un campo K . Sia $\text{Hom}(E, F)$ l'insieme degli omomorfismi tra lo spazio vettoriale E e lo spazio vettoriale F . Definiamo in $\text{Hom}(E, F)$ una operazione di addizione nel seguente modo: dati gli omomorfismi $\alpha : E \rightarrow F$ e $\beta : E \rightarrow F$ definiamo:

$$\alpha + \beta : E \rightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che $\alpha + \beta$ è un omomorfismo.

Definiamo in $\text{Hom}(E, F)$ una operazione di moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo:

dato l'omomorfismo $\alpha : E \rightarrow F$ e l'elemento $k \in K$, definiamo:

$$k\alpha : E \rightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(k\alpha)(\mathbf{v}) = k\alpha(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che $k\alpha$ è un omomorfismo.

△

Teorema 13.2 *L'insieme $\text{Hom}(E, F)$ con le operazioni di cui sopra è uno spazio vettoriale.*

DIMOSTRAZIONE Non diamo tutta la dimostrazione.

Ci limitiamo a far notare che il vettore nullo di $\text{Hom}(E, F)$ è l'omomorfismo che associa ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di E , il vettore nullo di F . Questo omomorfismo viene ovviamente chiamato **omomorfismo nullo**.

Dato poi $\eta \in \text{Hom}(E, F)$, il suo opposto è l'omomorfismo $(-1)\eta$.

La dimostrazione di queste due proprietà viene lasciata per esercizio.

La dimostrazione delle altre proprietà di uno spazio vettoriale non è particolarmente istruttiva e quindi viene omessa (leggi: non fa parte del programma del corso). ■

Teorema 13.3 *Siano E e F spazi vettoriali su un campo K .*

Siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e F rispettivamente.

Si consideri l'applicazione:

$$\psi : \text{Hom}(E, F) \longrightarrow M(K, p, q)$$

che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.

Allora:

- *l'applicazione ψ è un isomorfismo tra spazi vettoriali;*

- *l'isomorfismo inverso di ψ è l'applicazione che associa ad ogni matrice l'omomorfismo associato ad essa relativamente alle basi date.*

Da tutto ciò segue inoltre:

$$\dim \text{Hom}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

DIMOSTRAZIONE Una volta che si è ben compreso come si associa una matrice ad un omomorfismo, la dimostrazione è molto più semplice di quanto si possa pensare a prima vista. Viene pertanto lasciata per esercizio. ■

Nota 13.4 L'isomorfismo appena definito dipende dalla scelta delle basi. In altre parole, se si cambiano le basi, cambia l'isomorfismo. Per questa ragione l'isomorfismo viene detto **non canonico**. △

Esercizio di base EB.13.1 Consideriamo in R^3 lo spazio vettoriale π formato dai vettori (x, y, z) tali che $x + y + z = 0$.

1) Dimostrare che l'insieme H' degli omomorfismi $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$ tali che $\pi \subseteq \ker \eta$ è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(R^3, R^4)$.

2) Determinare la dimensione di H' . △

13.3 Esercizi

Esercizio E.13.1 Siano E e F spazi vettoriali su un campo K . Sia F' un sottospazio vettoriale di F . Sia H'' il sottoinsieme di $\text{Hom}(E, F)$ formato da tutti gli omomorfismi aventi l'immagine contenuta in F' .

Dimostrare che H'' è un sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(E, F)$.

Esercizio E.13.2 Sia F' il sottospazio vettoriale di R^4 così definito:

$$F' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Sia H'' il sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(R^3, R^4)$ formato da tutti gli omomorfismi aventi l'immagine contenuta in F' .

Determinare la dimensione di H'' .

Esercizio E.13.3 Sia π il sottospazio vettoriale di R^3 definito in EB.13.1.

Sia F' il sottospazio vettoriale di R^4 definito in E.13.2. Sia H''' il sottospazio vettoriale di $\text{Hom}(R^3, R^4)$ formato da tutti gli omomorfismi il cui nucleo contiene π e aventi l'immagine contenuta in F' .

Determinare la dimensione di H''' .

13.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.13.1 1) Ovviamente l'omomorfismo nullo appartiene a H' .

Dimostriamo ora che H' è chiuso rispetto all'addizione. Siano η e β elementi di H' . Quindi:

$$\eta(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \pi$$

Dobbiamo dimostrare che si ha $\eta + \beta \in W$.

Per ogni $\mathbf{v} \in \pi$, si ha:

$$(\eta + \beta)(\mathbf{v}) = \eta(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Dimostriamo ora che H' è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Dobbiamo cioè dimostrare che, per ogni $k \in R$, si ha $k\eta \in H'$. Si ha:

$$(k\eta)(\mathbf{v}) = k(\eta(\mathbf{v})) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Abbiamo dimostrato che H' è un sottospazio vettoriale.

2) Dobbiamo ora determinare la dimensione di H' . Per far ciò, ci è utile vedere come è fatto un omomorfismo di H' .

Sappiamo che, per definire un omomorfismo $\eta : R^3 \rightarrow R^4$, è sufficiente definire le immagini dei vettori di una base di R^3 . Poichè noi vogliamo che si abbia $\pi \subseteq \ker \eta$ ci conviene scegliere una base di R^3 che abbia due vettori in π . Consideriamo pertanto una base di π .

Sia $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)\}$ una base di π . Completiamo tale base aggiungendo ad essa un vettore linearmente indipendente. Sia, per esempio:

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\}$$

una base di R^3 .

Un omomorfismo $\eta : R^3 \rightarrow R^4$ appartiene a H' se e solo se:

$$\eta(\mathbf{v}_1) = \eta(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

Notiamo inoltre che non abbiamo alcuna condizione su $\eta(\mathbf{v}_3)$.

La matrice associata ad un omomorfismo $\eta \in H'$ relativamente alla base di R^3 di cui

sopra e alla base canonica di R^4 è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora l'isomorfismo

$$\psi : \text{Hom}(R^3, R^4) \longrightarrow M(R, 4, 3)$$

definito in 13.3 che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.

L'immagine attraverso ψ di H' è dato sottospazio M' di $M(R, 4, 3)$ formato dalle matrici di cui sopra.

Per determinare quindi la dimensione di H' basta determinare la dimensione di M' .

Si verifica facilmente che M' ha dimensione uguale a 4. Quindi $\dim H' = 4$.

13.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.13.1 L'omomorfismo nullo ovviamente appartiene a H'' . La chiusura di H'' rispetto all'addizione si dimostra facilmente sfruttando il fatto che F' è un sottospazio vettoriale di F e che quindi è chiuso rispetto all'addizione. Altrettanto facilmente si dimostra la chiusura di H'' rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Soluzione dell'esercizio E.13.2 Per determinare la dimensione di H'' ci si comporta essenzialmente come nell'esercizio EB.13.1: si passa alle matrici associate agli omomorfismi di H'' .

Ovviamente conviene scegliere in R^3 e in R^4 basi opportune.

In R^3 possiamo scegliere una base qualsiasi; per esempio la base canonica.

In R^4 invece ci conviene scegliere una base contenente come primi vettori i vettori di una base di F' .

Si dimostra facilmente che F' ha dimensione uguale a 2.

Prendiamo quindi una base di R^4 formata da due vettori formanti una base di F e da altri due vettori.

Le matrici associate agli omomorfismi di H'' relativamente alla base canonica di R^3 e alla base scelta di R^4 sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando come in EB.13.1 si dimostra che H'' ha dimensione uguale a 6.

Soluzione dell'esercizio E.13.3 Si scelga in R^3 una base opportuna ispirandosi al procedimento usato in EB.13.1.

Si scelga in R^4 una base opportuna ispirandosi al procedimento usato in E.13.2.

Le matrici associate agli omomorfismi di H''' relativamente a tali basi sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando come in EB.13.1 si dimostra che H'' ha dimensione uguale a 2.

Capitolo 14

Endomorfismi tra spazi vettoriali

14.1 Introduzione

Studiamo ora un caso particolare di omomorfismi: gli omomorfismi di uno spazio vettoriale in se stesso.

Questo argomento è stato studiato in parte nel corso di geometria 2. Nel primo paragrafo riprendiamo brevemente argomenti già noti. Rimandiamo quindi ai testi del corso di geometria per esempi ed esercizi.

Nel secondo paragrafo trattiamo invece un argomento poco trattato nel corso di geometria: le matrici simili.

14.2 Endomorfismi

Definizione 14.1 Dato uno spazio vettoriale E su un campo K , un **endomorfismo di E** è un omomorfismo di E in E . $\triangle$

Nota 14.2 Gli endomorfismi sono quindi particolari omomorfismi. Valgono quindi per essi i teoremi visti per gli omomorfismi. In particolare, fissata una base di E , possiamo associare ad ogni endomorfismo di E una matrice quadrata. $\triangle$

Teorema 14.3 Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K .

Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata a α relativamente a tale base.

Si ha allora:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. $\blacksquare$

Teorema 14.4 Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K . Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata ad α relativamente ad essa.

Sia $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ un'altra base di E e sia A' la matrice associata ad α relativamente ad essa. Sia:

$$(\mathbf{e}'_1 \dots \mathbf{e}'_n) = (\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n)M$$

Si ha allora:

$$A' = M^{-1}AM$$

DIMOSTRAZIONE . È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. ■

14.3 Matrici simili

Definizione 14.5 Due matrici $A \in M(K, n, n)$ e $B \in M(K, n, n)$ si dicono *simili* (in simboli $A \sim B$) se

$$\exists M \in GL(K, n) \mid B = M^{-1}AM$$

Teorema 14.6 La relazione di similitudine $\sim$ in $M(K, n, n)$ è una relazione di equivalenza.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Dal teorema 14.4 segue:

Teorema 14.7 Due matrici sono simili se e solo se sono matrici associate ad uno stesso endomorfismo relativamente a basi eventualmente differenti.

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Da ciò segue:

Teorema 14.8 Matrici simili hanno stesso rango.

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Teorema 14.9 Se la matrice A è simile alla matrice B , allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la matrice A^n è simile alla matrice B^n .

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.14.1 Le seguenti due matrici sono simili?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.14.1 Si verifica facilmente che entrambe le matrici hanno rango uguale a 2. Ma ciò non ci garantisce che A e B siano simili. Notiamo però che si ha $A^2 = 0$ e $B^2 \neq 0$ e quindi le matrici A^2 e B^2 non sono simili. Da cui segue che le matrici A e B non sono simili.

14.5 Esercizi

Esercizio E.14.1 Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante.

Esercizio E.14.2 La proprietà precedente è invertibile?
In altre parole: matrici aventi lo stesso determinante sono simili?

Esercizio E.14.3 Dimostrare il seguente teorema.
Fissato $k \in K$, l'unica matrice simile alla matrice kI , dove I è la matrice identica, è la matrice kI stessa.

Esercizio E.14.4 Matrici aventi lo stesso rango sono simili?

Esercizio E.14.5 Dimostrare il seguente teorema.
Se A e B sono simili e A è invertibile allora anche B è invertibile. Inoltre A^{-1} è simile a B^{-1} .

Esercizio E.14.6 Dimostrare che le seguenti due matrici sono simili nel campo dei reali:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento. Sia $f : R^2 \rightarrow R^2$ l'endomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Se A è simile a B vuol dire che è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di R^2 tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B . Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

14.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.14.1 Se $A \sim B$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $A = M^{-1}BM$.

Per dimostrare quel che vogliamo si usa allora il teorema di Binet ricordando che si ha $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ (dimostrare quest'ultima formula).

Soluzione dell'esercizio E.14.2 La risposta è no. Ecco un controesempio. Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante nullo. Esse però non sono simili perché hanno rango differente.

Soluzione dell'esercizio E.14.3 Se $A \sim kI$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $A = M^{-1}kIM$.

Ma allora si ha $A = M^{-1}kIM = kM^{-1}IM = kM^{-1}M = kI$.

Soluzione dell'esercizio E.14.4 Matrici aventi lo stesso rango non sono necessariamente simili. Controesempio. Le matrici $2I$ e $3I$ sono ovviamente invertibili. Hanno quindi lo stesso rango. Dall'esercizio precedente segue però che non sono simili.

Soluzione dell'esercizio E.14.5 Se $A \sim A'$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM = A'$.

Inoltre, se A è invertibile, si ha $\det A \neq 0$. Applicando quindi il teorema di Binet si ha ...

Dimostriamo ora che le inverse di A e A' sono simili.

Si ha:

$$A'^{-1} = (M^{-1}AM)^{-1} = MA^{-1}M^{-1}$$

e quindi ...

Soluzione dell'esercizio E.14.6 Dal suggerimento dato segue che dobbiamo determinare due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di R^2 che siano linearmente indipendenti e tali che:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

Dobbiamo quindi determinare un vettore $\mathbf{v}_2 \in \ker f^2 - \ker f$. Osserviamo (esercizio) che da ciò segue $\mathbf{v}_1 \in \ker f - \{\mathbf{0}\}$.

Mostriamo inoltre che segue anche che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.

Sia infatti $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Applicando f si ottiene:

$\mathbf{0} = f(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = af(\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{v}_2) = b\mathbf{v}_1$ da cui segue, essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, che $b = 0$.

Quindi $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1$; ma si ha anche $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e quindi $a = 0$. Lasciamo al lettore la determinazione di $\mathbf{v}_2$ (a tal scopo calcolare A^2) e quindi di $\mathbf{v}_1$.

Capitolo 15

Matrici a blocchi

15.1 Introduzione

Studiamo ora un argomento non trattato nel corso di geometria: le matrici a blocchi.

15.2 Matrici a blocchi

Definizione 15.1 Sia $A \in M(K, p+q, p+q)$, $B_1 \in M(K, p, p)$ e $B_2 \in M(K, q, q)$. Diciamo che la matrice A è una matrice formata da due blocchi B_1 e B_2 (in simboli $A = bl(B_1, B_2)$), se:

- 1) la matrice B_1 è il minore di A formato dalle prime p righe e colonne,
- 2) la matrice B_2 è il minore di A formato dalle ultime q righe e colonne,
- 3) tutti gli elementi di A non appartenenti ai due minori B_1 e B_2 sono uguali a 0. Δ

Esempio 15.2 La matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

è formata da due blocchi. Uno di ordine 3 e uno di ordine 2. Δ

Esercizio di base EB.15.1 Suddividere in blocchi la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 15.3 La definizione di matrice a due blocchi si estende a matrici a n blocchi. Usiamo il simbolo $A = bl(B_1, B_2, \dots, B_n)$. Δ

Esempio 15.4 La seguente matrice è a tre blocchi.

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Nota 15.5 Abbiamo suddiviso la matrice A dell'esempio precedente in tre blocchi. Notiamo che ne avremmo potuto darne anche altre suddivisioni in blocchi. Avremmo infatti potuto considerare la matrice A suddivisa in due blocchi. Il primo blocco formato dalle prime tre righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime due righe e colonne. Un'altra suddivisione di A in due blocchi è data dal primo blocco formato dalle prime due righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime tre righe e colonne. Δ

Definizione 15.6 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K . Un sottospazio V di E si dice **invariante** per η se si ha $\eta(V) \subset V$. Pertanto, se V è un sottospazio invariante per η si può considerare la restrizione di η a V :

$$\eta|_V : V \longrightarrow V$$

Chiaramente è un endomorfismo di V . Δ

Esempio 15.7 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice formata da due blocchi di ordine 2.

Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di E .

Sia E_1 il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Sia E_2 il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.

Si osserva (esercizio) che le immagini di $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ sono entrambe contenute in E_1 . Da ciò segue (esercizio) che l'immagine di E_1 è contenuta in E_1 . Pertanto il sottospazio E_1 è invariante.

In modo analogo (esercizio) si verifica che il sottospazio E_2 è invariante.

Si consideri ora l'omomorfismo $\eta|_{E_1}$ e si consideri la matrice ad esso associata relativamente alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di E_1 . Vi verifica facilmente (esercizio) che essa è uguale al blocco della matrice A formato dalle prime due righe e due colonne di A .

In modo analogo (esercizio) si osserva che la matrice associata all'omomorfismo $\eta|_{E_2}$ relativamente alla base $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di E_2 è uguale al blocco della matrice A formato dalle ultime due righe e due colonne di A . Δ

Teorema 15.8 Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K . Sia

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Sia dato poi un endomorfismo

$$\eta : E \longrightarrow E$$

tale che

$$\eta(E_i) \subset E_i \quad \forall i = 1, \dots, p$$

Sia data fissata una base di E tale che i primi n_1 vettori siano una base di E_1 i successivi n_2 vettori siano una base di E_2 ecc. Si ha allora che:

1) la matrice A associata a η relativamente alla base scelta è una matrice a p blocchi:

$$A = bl(B_1, \dots, B_i, \dots, B_p)$$

2) Il blocco B_i è la matrice associata a $\eta|_{B_i}$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Si ha anche il viceversa:

Teorema 15.9 Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K . Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η è una matrice a p blocchi, allora si ha:

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$$

con E_i opportuni sottospazi vettoriali di E invarianti per η

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Teorema 15.10 Sia A una matrice a blocchi:

$$A = bl(B_1, \dots, B_i, \dots, B_j, \dots, B_p)$$

e sia A' la matrice ottenuta da A scambiando tra loro i blocchi B_i e B_j . Cioè:

$$A' = bl(B_1, \dots, B_j, \dots, B_i, \dots, B_p)$$

Allora $A \sim A'$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. In caso di necessità ispirarsi al seguente esempio. ■

Esempio 15.11 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di E .

Si verifica facilmente che la matrice associata a η relativamente alla base $\{e_3, e_4, e_1, e_2\}$ è la matrice A' .

Si ha pertanto:

$$A' = M^{-1}AM \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.15.1 Si ha:

$$A = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

15.4 Esercizi

Esercizio E.15.1 Verificare che le seguenti due matrici sono simili e determinare la matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

15.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.15.1 Ambedue le matrici sono formate da tre blocchi di ordine 1. Nella matrice B abbiamo gli stessi blocchi della matrice A ma in ordine inverso.

Si verifica pertanto facilmente (esercizio) che si ha

$$B = M^{-1}AM \quad \text{con} \quad M = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Capitolo 16

Diagonalizzabilità di endomorfismi

16.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo definito gli endomorfismi su uno spazio vettoriale E .

Abbiamo visto che, dato un endomorfismo η di E , se E ha dimensione finita, fissata una sua base, possiamo considerare la matrice associata a η relativamente alla base data. Cambiando la base cambia, in generale, la matrice associata.

Nel corso di Geometria è stato affrontato il problema di determinare, quando esiste, una base di E in modo tale che la matrice associata ad η relativamente a tale base sia diagonale.

Ricordiamo brevemente alcuni argomenti.

Rimandiamo ai testi di geometria del primo anno per esempi ed esercizi.

16.2 Diagonalizzazione di endomorfismi

Definizione 16.1 Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale E di dimensione finita si dice **diagonalizzabile** se esiste una base di E tale che la matrice associata a f relativamente a tale base sia diagonale. $\triangle$

Definizione 16.2 Sia dato un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$. Un vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in E$ si dice **autovettore** con **autovalore** λ se $\eta(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Sia:

$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in E \mid \eta(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

Quindi $E(\lambda)$ è costituito dal vettore nullo $\mathbf{0}$ e dagli autovettori con autovalore λ . Sappiamo che tale insieme è un sottospazio vettoriale di E e viene detto **autospazio di η relativo a λ** . La sua dimensione viene detta **molteplicità geometrica** di λ e viene indicata con il simbolo $mg_\eta(\lambda)$. $\triangle$

Teorema 16.3 *Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale E è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di E formata da autovettori.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 16.4 *Dato un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ si ha che $\lambda_1 \in K$ è un autovalore se e solo se, indicata con A la matrice associata ad η relativamente ad una base fissata di E , si ha che λ_1 è radice del polinomio di grado n in λ*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

*Il polinomio $p_A(\lambda)$ si dice **polinomio caratteristico della matrice A** . Sia ora B la matrice associata a η relativamente ad un'altra base di E ; allora si ha:*

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

*Quindi il polinomio in questione non dipende dalla scelta della base in E . Possiamo quindi indicare tale polinomio con il simbolo $p(\lambda)$ e chiamarlo **polinomio caratteristico dell'endomorfismo η** .*

*Inoltre, se λ_1 è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità uguale a m , si dice che l'autovalore λ_1 ha **molteplicità algebrica** uguale a m . La molteplicità algebrica viene indicata con il simbolo $ma_\eta(\lambda)$.*

Ricordiamo che, dato un polinomio $p(x) \in K[x]$, una sua radice x_1 si dice di molteplicità m se $p(x) = (x - x_1)^m q(x)$ con $q(x) \in K[x]$ e inoltre $p(x)$ non è fattorizzato da $(x - x_1)^{m+1}$.

DIMOSTRAZIONE Vedere la dimostrazione nel testo del corso di geometria. ■

Nota 16.5 Osserviamo che, dato un endomorfismo η con autovalore λ , si ha:

$$E(\lambda) = \ker(\eta - \lambda I)$$

Teorema 16.6 *La molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale della sua molteplicità algebrica.*

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione viene omessa e quindi non fa parte del programma del corso. ■

Teorema 16.7 *Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K di dimensione uguale a n . Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ gli autovalori distinti e $E(\lambda_1), \dots, E(\lambda_p)$ i relativi autospazi.*

Si ha che gli autospazi sono in somma diretta; cioè:

$$E' = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_p)$$

dove E' non coincide necessariamente con E .

Inoltre l'endomorfismo η è diagonalizzabile se e solo se E coincide con E' e quindi se e solo se sono verificate contemporaneamente le seguenti due condizioni:

- a) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale a n (dimensione di E)*
- b) Per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.*

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione che gli autospazi sono in somma diretta viene omessa e quindi non fa parte del programma del corso.

La dimostrazione della seconda parte del teorema viene lasciata per esercizio. ■

Definizione 16.8 Una matrice si dice **diagonalizzabile** se essa è simile ad una matrice diagonale.

Diagonalizzare una matrice A significa determinare, quando esiste, una matrice A' simile alla matrice A e una matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.

In altre parole, se $A \in M(K, n, n)$, si considera l'endomorfismo di K^n associato ad A relativamente alla base canonica di K^n e si determina, quando esiste, una base di K^n formata da autovettori.

Si può quindi parlare di autovalori, autovettori, autospazi di una matrice. $\triangle$

Esercizio di base EB.16.1 Dimostrare che la matrice seguente è diagonalizzabile in $\mathbb{C}$ ma non in $\mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo come si faccia a vedere se due matrici A e B sono simili.

Abbiamo visto che due matrici sono simili se e solo se rappresentano uno stesso endomorfismo relativamente a due basi diverse. Questa osservazione ci permette di dare il seguente teorema.

Teorema 16.9 *Condizione necessaria affinché le matrici A e B appartenenti a $M(K, n, n)$ siano simili è che A e B abbiano gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e geometriche.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Nota 16.10 Se le due matrici sono diagonalizzabili la condizione di cui sopra è anche sufficiente. In questo caso infatti le due matrici sono simili ad una stessa matrice diagonale.

Se una delle matrici è diagonalizzabile e l'altra non lo è, ovviamente le due matrici non sono simili.

Nel caso in cui le due matrici non siano diagonalizzabili, la condizione di cui sopra non è a priori sufficiente. In EB.14.1 abbiamo dato l'esempio di due matrici che hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità sia algebrica che geometrica (esercizio) che non sono simili. $\triangle$

16.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.16.1 Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

esso non ha autovalori reali. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. D'altronde $p_A(\lambda)$ ha due autovalori complessi coniugati distinti in $\mathbb{C}$. Essi sono i e $-i$.

Per diagonalizzare A in $\mathbb{C}$, si consideri l'endomorfismo η di $\mathbb{C}^2$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{C}^2$ e si determini una base per ognuno dei due autospazi.

16.4 Esercizi

Esercizio E.16.1 Diagonalizzare in $\mathbb{R}$ la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.16.2 Dimostrare il seguente teorema. Gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi della diagonale principale della matrice.

Esercizio E.16.3 Determinare i valori dei parametri reali a, b, c per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.16.4 Determinare i valori del parametro reale h per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.16.5 Diagonalizzare, se è possibile, l'endomorfismo η di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$\eta(a + bx + cx^2) = a + b + c + (2b + c)x + 3cx^2$$

Esercizio E.16.6 Diagonalizzare, se è possibile, l'endomorfismo η di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$\eta(a + bx + cx^2) = a + b + c + (a + b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Esercizio E.16.7 Dimostrare che le seguenti due matrici sono simili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare $S \in GL(\mathbb{R}, 2)$ tale che

$$B = S^{-1}AS$$

Suggerimento. Dimostrare innanzitutto che A e B sono simili ad una stessa matrice diagonale.

16.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.16.1 Si consideri l'endomorfismo η di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.

Si verifica facilmente che la matrice A , e quindi l'endomorfismo η , ha come autovalori 0 e 2 con molteplicità algebrica (e anche geometrica) uguali, rispettivamente a 2 e 1.

Una base di $E(0) = \ker \eta$ è data da $\{\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)\}$ (esercizio).

Una base di $E(2) = \ker(\eta - 2I)$ è data da $\{\mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)\}$ (esercizio).

Visto che la teoria ci dice che si ha $\mathbb{R}^3 = E(0) \oplus E(2)$, consideriamo la base di autovettori $\{\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1), \mathbf{v}_3 = (1, 0, 1)\}$ di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a η relativamente ad essa è:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A' = M^{-1}AM$$

con:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione dell'esercizio E.16.2 Supponiamo che la matrice A sia triangolare superiore.

Si calcoli il determinante della matrice $A = (a_{ij})$ sviluppandolo secondo la prima colonna. Si ottiene:

$$p_a(\lambda) = (a_{11} - \lambda) \det(B - \lambda I)$$

dove B è il minore di A ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna di A .

Anche B è una matrice triangolare superiore. Si sviluppi di nuovo il suo determinante secondo la prima colonna. E così via.

Come ci si comporta se A è una matrice triangolare inferiore?

Soluzione dell'esercizio E.16.3 Gli autovalori della matrice sono 1, 2 e 3 (perché?). Sono pertanto tutti distinti. Ognuno dei autospazi ha quindi dimensione uguale a 1 (perché?). Pertanto $\mathbb{R}^3$ è la somma diretta dei tre autospazi.

La matrice A è quindi diagonalizzabile per ogni valore di a, b e c .

Soluzione dell'esercizio E.16.4 Osserviamo che gli autovalori di A sono uguali a 1 e h .

Distinguiamo ora due casi:

1) $h = 1$. Il questo caso la matrice A ha tutti gli autovalori uguali a 1 e quindi non è diagonalizzabile, altrimenti dovrebbe essere la matrice identica (perché?).

2) $h \neq 1$. In tal caso si verifica che $ma(1) = mg(1) = 2$ e $ma(h) = mg(h) = 1$ (esercizio) e quindi la matrice A è diagonalizzabile.

Soluzione dell'esercizio E.16.5 Si consideri la matrice A associata a η relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

La matrice A è triangolare superiore e tutti gli elementi della diagonale principale sono distinti (esercizio).

Da ciò segue che la matrice A , e quindi l'endomorfismo η è diagonalizzabile.

Si lascia come esercizio la determinazione della diagonalizzata A' di A e della matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.

Soluzione dell'esercizio E.16.6 Si consideri la matrice A associata a η relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.

Si verifica facilmente che la matrice A , e quindi l'endomorfismo η , ha come autovalori 0 e 3 con molteplicità algebrica (e anche geometrica) uguali, rispettivamente a 2 e 1.

Da ciò segue che la matrice A , e quindi l'endomorfismo η è diagonalizzabile (perché). Si lascia come esercizio la determinazione della diagonalizzata A di A e della matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.

Soluzione dell'esercizio E.16.7 Sia la matrice A che la matrice B sono triangolari superiori ed hanno sulla diagonale principale i numeri 1 e 2. Pertanto (esercizio) entrambe sono simili alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi $A \sim D$, $D \sim B$. Dalla proprietà transitiva della relazione di similitudine tra matrici segue $A \sim B$.

Vogliamo ora determinare la matrice S tale che

$$B = S^{-1}AS$$

Lasciamo come esercizio la determinazione delle matrici M e N tali che:

$$D = M^{-1}AM = N^{-1}BN$$

Moltiplicando la seconda uguaglianza a sinistra per N e a destra per N^{-1} otteniamo

$$B = (NM^{-1})A(MN)^{-1} = (MN^{-1})^{-1}A(MN^{-1})$$

e quindi

$$B = S^{-1}AS \quad \text{con} \quad S = MN^{-1}$$

Capitolo 17

Matrici jordanizzabili

17.1 Introduzione

Abbiamo visto che non tutte le matrici sono simili a matrici diagonali.

Mostriamo in questo capitolo che alcune matrici sono simili a matrici di Jordan. Queste ultime sono matrici in generale non diagonali, ma "quasi diagonali".

17.2 Matrici di Jordan

Definizione 17.1 Dato un elemento λ di $\mathbb{K}$, chiamiamo **blocco di Jordan** di ordine r con autovalore λ la matrice di ordine r avente tutti gli elementi appartenenti alla diagonale principale uguali a λ , tutti gli elementi della linea subito superiore alla diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi nulli. $\triangle$

Esempio 17.2 1) Il blocco di Jordan di ordine 1 con autovalore 5 è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

2) Il blocco di Jordan di ordine 2 con autovalore 5 è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Il blocco di Jordan di ordine 3 relativo all'autovalore 5 è la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Nota 17.3 Ovviamente l'autovalore λ di un blocco di Jordan di ordine r ha molteplicità algebrica uguale a r e molteplicità geometrica uguale a 1. $\triangle$

Definizione 17.4 Una **matrice di Jordan** è una matrice a blocchi

$$A = bl(B_1, \dots, B_p)$$

i cui blocchi B_i sono blocchi di Jordan.

Una matrice A simile ad una matrice A' che sia una matrice di Jordan si dice **jordanizzabile**, la matrice A' si dice **forma canonica di Jordan** della matrice A .

Esempio 17.5 a) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con un blocco con autovalore 1 di ordine 2 e un blocco con autovalore 3 di ordine 1.

b) La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1 di ordine 2.

c) La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con un blocco con autovalore 1 di ordine 2 e due blocchi con autovalore 1 di ordine 1. $\triangle$

Nota 17.6 Ogni matrice diagonale è una matrice di Jordan formata da blocchi di ordine 1; viceversa, ogni matrice di Jordan formata da blocchi di lunghezza 1 è diagonale. Da ciò segue che una matrice diagonale è in forma canonica di Jordan. Inoltre una matrice è diagonalizzabile se e solo se essa è dotata di forma canonica di Jordan i cui blocchi sono di lunghezza uguale a 1. $\triangle$

Esempio 17.7 La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1 uno di ordine 3 e l'altro di ordine 2.

La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1, uno di ordine 3 e l'altro di ordine 2. Essa ha quindi gli stessi blocchi di Jordan della matrice D .

Vogliamo dimostrare che la matrice E è simile alla matrice D . Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^5$ associato alla matrice D relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$. Notiamo che, per passare dalla matrice E alla matrice D , è sufficiente scambiare tra loro i due blocchi di Jordan. La matrice E quindi è la matrice associata ad f relativamente alla base di $\mathbb{R}^5$ ottenuta dalla base canonica scambiando tra loro le basi dei due spazi invarianti; in altre parole la matrice E è la matrice associata ad f relativamente alla base $\{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Lasciamo come esercizio la determinazione della matrice di passaggio tra le matrici D e E . $\triangle$

Teorema 17.8 *Se due matrici hanno stessa forma canonica di Jordan a meno di scambi di blocchi, allora esse sono simili.*

DIMOSTRAZIONE. Esercizio. $\square$

Ci chiediamo se ogni matrice $A \in M(\mathbb{K}, n, n)$ sia dotata di forma canonica di Jordan.

La domanda è ovviamente equivalente alla seguente domanda:

dato un endomorfismo su uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, esiste una base di E tale che la matrice associata all'endomorfismo relativamente a essa sia di una matrice di Jordan?

Definizione 17.9 Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E . Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η relativamente a tale base è una matrice di Jordan, l'endomorfismo si dice **jordanizzabile** e tale base si dice **base di Jordan**. $\triangle$

Definizione 17.10 Una matrice di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ si dice avere tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori in $\mathbb{K}$ è uguale a n . $\triangle$

Teorema 17.11 *Una matrice di Jordan a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Teorema 17.12 *Una matrice a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ non avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ non è jordanizzabile.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. $\blacksquare$

Ci chiediamo allora se una matrice avente tutti gli autovalori nel campo $\mathbb{K}$ sia jordanizzabile. Possiamo porci la stessa domanda per un endomorfismo avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.

La risposta a questa domanda è positiva. Si ha infatti il seguente:

Teorema 17.13 *Ogni matrice avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ è simile ad una matrice di Jordan.*

La dimostrazione di questo teorema non è semplice e quindi la omettiamo.

17.3 Esempi di jordanizzazione

Qui ci limitiamo a mostrare alcune matrici per le quali troviamo matrici di Jordan ad esse simili.

Esempio 17.14 In effetti un esempio di tal genere lo abbiamo già visto nell'esercizio E.14.6.

In esso abbiamo dimostrato che le seguenti due matrici sono simili nel campo dei reali:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice B è una matrice di Jordan formata da un solo blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 0. Per far ciò abbiamo considerato l'endomorfismo $f : R^2 \rightarrow R^2$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Abbiamo poi notato che, se A è simile a B , vuol dire che è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di R^2 tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B . Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$$

Il vettore $\mathbf{v}_2$ appartiene quindi a $\ker f^2$ ma non appartiene a $\ker f$. Uno di tali vettori è il vettore $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Infatti $f(\mathbf{e}_2) = (9, -6)$ e $f[(9, -6)] = \mathbf{0}$.

Poniamo allora $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ e $\mathbf{v}_1 = (9, -6)$.

Osserviamo che la seguente matrice è invertibile:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo pertanto $B = M^{-1}AM$

△

Esercizio di base EB.17.1 Mostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono simili nel campo dei reali.

△

Esempio 17.15 Vogliamo mostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è simile alla seguente matrice di Jordan formata da un solo blocco di Jordan

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Osserviamo che, se A è simile a B , allora è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B .

Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2, \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1, \quad f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$$

Indichiamo ciò con il seguente simbolismo

$$\mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Ne segue che dobbiamo determinare un vettore $\mathbf{v}_3 \in \ker f^3 - \ker f^2$.

Osserviamo come si comportano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ rispetto a composizioni successive di f . Abbiamo:

$$\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_2 \longrightarrow 2\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_3 \longrightarrow \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \longrightarrow 6\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Pertanto f^3 è l'endomorfismo nullo e $\ker f^3 = \mathbb{R}^3$.

Possiamo poi porre $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$. Naturalmente questa non è l'unica scelta possibile.

Poniamo poi $\mathbf{v}_2 = f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = 6\mathbf{e}_1$.

Osserviamo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ poiché la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Abbiamo infine $B = M^{-1}AM$.

△

Teorema 17.16 Siano A e B due matrici di ordine n su un campo $\mathbb{K}$. Sia $B = M^{-1}AM$.

Allora per ogni $h \in \mathbb{K}$ si ha $B - hI = M^{-1}(A - hI)M$.

DIMOSTRAZIONE Viene lasciata per esercizio.

Suggerimento: vi sono due modi per dare la dimostrazione:

primo modo: pensare che due matrici sono simili se e solo se sono associate ad uno stesso endomorfismo relativamente a basi differenti

secondo modo: usare una dimostrazione analoga a quella data per dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. ■

Esercizio di base EB.17.2 Mostrare che le matrici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono simili nel campo dei reali e determinare M tale che $D = M^{-1}AM$.

△

17.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.17.1 Sia $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$. Dobbiamo trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice associata ad f relativamente ad essa sia la matrice B .

Dobbiamo quindi determinare $\mathbf{v}_2 \in \ker f^2 - \ker f$.

Possiamo scegliere $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$. Una volta scelto $\mathbf{v}_2$, dobbiamo ovviamente fissare $e_1 = f(e_2) = 2\mathbf{e}_1$.

Osserviamo che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Abbiamo infine $B = M^{-1}AM$

Soluzione dell'esercizio di base EB.17.2 Osserviamo che si ha $C = A - I$ e $D = B - I$ dove A e B sono le matrici date in EB.17.1. Abbiamo visto che le matrici A e B sono simili. Quindi per il teorema 17.16 anche le matrici C e D sono simili. Una matrice M tale che $D = M^{-1}CM$ è la matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.

17.5 Esercizi

Esercizio E.17.1 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare tutte le matrici M tali che $B = M^{-1}AM$.

Esercizio E.17.2 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare tutte le matrici M tali che $B = M^{-1}AM$.

Esercizio E.17.3 Date le matrici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare una matrice M tale $F = M^{-1}EM$.

17.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.17.1 In 17.14 abbiamo determinato una matrice M . Ora le vogliamo tutte.

Per far ciò osserviamo che, per determinare M abbiamo cercato un vettore $\mathbf{v}_2$ appartenente a $\ker f^2 - \ker f$. A partire da questo vettore abbiamo poi posto $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2)$.

Per determinare tutte le matrici M dobbiamo allora cercare tutti i vettori appartenenti a $\ker f^2 - \ker f$.

Osserviamo che si ha

$$\ker f^2 = \mathbb{R}^2, \quad \ker f = \{(3t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto

$$\ker f^2 - \ker f = \{(a, b) \mid b \neq -\frac{2}{3}a\}$$

Poniamo quindi:

$$\mathbf{v}_2 = (a, b) \quad , \quad \mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = (6a + 9b, -4a - 6b)$$

Consideriamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6a + 9b & a \\ -4a - 6b & b \end{pmatrix}$$

Osserviamo che si ha $\det M = (2a + 3b)^2$ e quindi la matrice M è invertibile per ogni $b \neq -\frac{2}{3}a$. Da tutto ciò segue che le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 6a + 9b & a \\ -4a - 6b & b \end{pmatrix}$$

con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $b \neq -\frac{2}{3}a$ sono tutte e sole le matrici per le quali si ha

$$B = M^{-1}AM$$

.

Soluzione dell'esercizio E.17.2 In EB.17.1 abbiamo determinato una matrice M . Per determinare tutte le matrici M dobbiamo determinare tutti i vettori

$\mathbf{v}_2 \in \ker f^2 - \ker f$. Osserviamo che si ha $\ker f^2 = \mathbb{R}^2$, $\ker f = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Quindi $\ker f^2 - \ker f = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\}$.

Poniamo allora $\mathbf{v}_2 = (a, b)$ con $b \neq 0$ e $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = (2b, 0)$.

Abbiamo che tutte le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 2b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

con a reale qualsiasi e b reale non nullo sono invertibili e che $B = M^{-1}AM$.

Soluzione dell'esercizio E.17.3 La matrice E è una matrice a blocchi, formata da un blocco di ordine 2 e un blocco di ordine 1.

La matrice F è una matrice di Jordan formata da un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 1 e da un blocco di ordine 1 relativo all'autovalore 2. Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice F relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Possiamo decomporre $\mathbb{R}^3$ in due sottospazi invarianti per f .

Abbiamo $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ dove V è il sottospazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e W è il sottospazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{e}_3\}$. La matrice associata a $f|_V$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto nell'esercizio EB.17.2 che la matrice C è simile al primo blocco, che indichiamo con D della matrice F . Abbiamo visto che si ha $D = M^{-1}CM$ con

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In altre parole la matrice D è la matrice associata a $f|_V$ relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2\}$ di V .

Passiamo ora al secondo blocco della matrice E . Esso è uguale al secondo blocco della matrice F .

Da tutto ciò segue che la matrice F è la matrice associata a f relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3\}$.

Pertanto $F = N^{-1}EN$ con

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Indice

1	Applicazioni dell'algoritmo di Gauss	1
1.1	Introduzione	1
1.2	Operazioni elementari	2
1.3	Calcolo del rango	9
1.4	Calcolo del determinante	11
1.5	Soluzioni degli esercizi di base	13
1.6	Sunto	14
1.6.1	Operazioni elementari	14
1.6.2	Algoritmo per il calcolo del rango di una matrice	15
1.6.3	Algoritmo per il calcolo del determinante di una matrice	15
1.7	Esercizi	16
1.8	Soluzioni degli esercizi	17
2	Campi	21
2.1	Introduzione	21
2.2	Addizione e moltiplicazione sui reali	21
2.3	Definizione di campo	23
2.4	Proprietà dei campi	25
2.5	Sistemi lineari a coefficienti in un campo	28
2.6	Soluzioni degli esercizi di base	29
2.7	Sunto	30
2.7.1	Definizione di campo	30
2.7.2	Proprietà dei campi	31
2.7.3	Sistemi lineari a coefficienti in un campo	31
2.8	Esercizi	32
2.9	Soluzioni degli esercizi	32
3	Spazi vettoriali a coefficienti in un campo	33
3.1	Introduzione	33
3.2	Spazi vettoriali su un campo qualsiasi	33
3.3	Esempi di spazi vettoriali	35
3.4	Basi di Lagrange	37
3.5	Soluzioni degli esercizi di base	40
3.6	Esercizi	40
3.7	Soluzioni degli esercizi	41

4	Dimensione di uno spazio vettoriale	43
4.1	Introduzione	43
4.2	Vettori e matrici	43
4.3	Dimensione	46
4.4	Soluzioni degli esercizi di base	48
4.5	Esercizi	49
4.6	Soluzioni degli esercizi	49
5	Sottospazi vettoriali	51
5.1	Introduzione	51
5.2	Sottospazi vettoriali	51
5.3	Soluzioni degli esercizi di base	53
5.4	Esercizi	55
5.5	Soluzioni degli esercizi	55
6	Intersezione e somma di sottospazi vettoriali	57
6.1	Introduzione	57
6.2	Intersezione e somma di sottospazi vettoriali	57
6.3	Soluzioni degli esercizi di base	60
6.4	Esercizi	60
6.5	Soluzioni degli esercizi	61
7	Somma diretta di sottospazi vettoriali	63
7.1	Introduzione	63
7.2	Somma diretta	63
7.3	Soluzione degli esercizi di base	66
7.4	Esercizi	67
7.5	Soluzione degli esercizi	67
8	Cambio di base	69
8.1	Introduzione	69
8.2	Cambio di base	69
8.3	Soluzioni degli esercizi di base	72
8.4	Esercizi	72
8.5	Soluzioni degli esercizi	73
9	Funzioni	75
9.1	Introduzione	75
9.2	Richiami sulle funzioni	75
9.3	Composizione di funzioni	77
10	Omomorfismi tra spazi vettoriali	79
10.1	Omomorfismi	79
10.2	Soluzioni degli esercizi di base	81
10.3	Esercizi	81
10.4	Soluzioni esercizi	81

11 Omomorfismi e matrici	83
11.1 Introduzione	83
11.2 Omomorfismi e matrici	83
11.3 Cambio di base	86
11.4 Composizione di omomorfismi	88
12 Isomorfismi	91
12.1 Introduzione	91
12.2 Isomorfismi tra spazi vettoriali	91
13 Spazio degli omomorfismi	93
13.1 Introduzione	93
13.2 Spazio degli omomorfismi	93
13.3 Esercizi	94
13.4 Soluzioni degli esercizi di base	95
13.5 Soluzioni degli esercizi	96
14 Endomorfismi tra spazi vettoriali	99
14.1 Introduzione	99
14.2 Endomorfismi	99
14.3 Matrici simili	100
14.4 Soluzioni degli esercizi di base	101
14.5 Esercizi	101
14.6 Soluzioni degli esercizi	101
15 Matrici a blocchi	103
15.1 Introduzione	103
15.2 Matrici a blocchi	103
15.3 Soluzioni degli esercizi di base	106
15.4 Esercizi	106
15.5 Soluzioni degli esercizi	106
16 Diagonalizzabilità di endomorfismi	107
16.1 Introduzione	107
16.2 Diagonalizzazione di endomorfismi	107
16.3 Soluzioni degli esercizi di base	109
16.4 Esercizi	110
16.5 Soluzioni degli esercizi	110
17 Matrici jordanizzabili	113
17.1 Introduzione	113
17.2 Matrici di Jordan	113
17.3 Esempi di jordanizzazione	116
17.4 Soluzioni degli esercizi di base	117
17.5 Esercizi	118
17.6 Soluzioni degli esercizi	118