**GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA GESTIONALE
Soluzione del primo facsimile d'esame**

PRIMO ESERCIZIO

1. L'affermazione è falsa. Ecco un controesempio.

Consideriamo l'omomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definito da $f[(a, b)] = a$. Ovviamente f è surgettivo, ma $\{f[(1, 0)] = 1, f[(0, 1)] = 0\}$ non è una base di $\mathbb{R}$.

2. L'affermazione è vera. Sappiamo infatti che $\{f(\mathbf{e}_1) \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è un insieme di generatori di $f(E)$. Ma f è surgettivo se e solo se $f(E) = F$, cioè se e solo se $\{f(\mathbf{e}_1) \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è un insieme di generatori per F .

SECONDO ESERCIZIO

1. Dimostriamo che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4[x]$. Il polinomio nullo ovviamente si annulla su 2. Quindi $\mathbf{0} \in V$.

Sia $p(x) \in V$ (quindi $p(2) = 0$) e $q(x) \in V$ (quindi $q(2) = 0$).

Sia $r(x) = p(x) + q(x)$. Poiché $r(2) = p(2) + q(2) = 0 + 0 = 0$, si ha $r(x) \in V$.

Sia $p(x) \in V$ e sia $s(x) = kp(x)$. Poiché $s(2) = k0 = 0$, si ha $s(x) \in V$.

Vogliamo ora determinare una base di V .

Consideriamo la base di Lagrange $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ associata ai numeri 0, 1, 2, 3.

Consideriamo $p(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) + a_4p_4(x)$ e imponiamo $p(x) \in V$.

Abbiamo $p(2) = a_3 = 0$. Ne segue che $\{p_1(x), p_2(x), p_4(x)\}$ è una base di V .

2. Per determinare un endomorfismo f di $\mathbb{R}^4[x]$, fissiamo la base di Lagrange di cui sopra e consideriamo l'unico endomorfismo verificante le seguenti condizioni:

$$f(p_1(x)) = 0, \quad f(p_2(x)) = 0, \quad f(p_3(x)) = p_1(x), \quad f(p_4(x)) = 0$$

L'immagine di f ha come base $\{p_1(x)\}$ e quindi è contenuta in V ed ha dimensione uguale a 1. Ne segue che il nucleo ha dimensione uguale a 3.

Poiché tutti i vettori della base di V sono contenuti in $\ker f$, si ha $V = \ker f$. Abbiamo determinato un endomorfismo verificante le condizioni richieste.

3. L'insieme degli endomorfismi verificanti le condizioni richieste non contiene l'endomorfismo nullo, perché quest'ultimo ha il nucleo coincidente con $\mathbb{R}^4[x] \neq V$; pertanto non è un sottospazio vettoriale degli endomorfismi di $\mathbb{R}^4[x]$.
4. Associando ad ogni endomorfismo di $\mathbb{R}^4[x]$ la sua matrice associata relativa ad una base fissata, per esempio la base di Lagrange di cui sopra, abbiamo un isomorfismo tra $End(\mathbb{R}^4[x])$ e $M(\mathbb{R}, 4, 4)$. Poiché la dimensione di $M(\mathbb{R}, 4, 4)$ è uguale a 16, anche la dimensione di $End(\mathbb{R}^4[x])$ è uguale a 16.

TERZO ESERCIZIO

Osserviamo innanzitutto che le tre matrici hanno come autovalore 1 con molteplicità algebrica uguale a 3.

Osserviamo poi che le matrici B e C sono matrici di Jordan. Queste, insieme alla matrice identica I , a meno di scambi di blocchi, sono tutte le matrici di Jordan aventi come autovalori unicamente il numero 1.

Da ciò segue che la matrice A è simile o a I o a B o a C .

La matrice A non è simile alla matrice I , perché la matrice I è simile solo a se stessa. Per capire se A è simile a B o a C calcoliamo la molteplicità geometrica dell'autovalore 1.

La molteplicità geometrica di 1 per A è uguale a $3 - \text{rk}(A - I) = 3 - 2 = 1$.

La molteplicità geometrica di 1 per B è uguale a $3 - \text{rk}(B - I) = 3 - 1 = 2$.

La molteplicità geometrica di 1 per C è uguale a $3 - \text{rk}(C - I) = 3 - 2 = 1$.

Pertanto $A \not\sim B$, $A \sim C$, $B \not\sim C$.

Vogliamo ora determinare una matrice M tale che $C = M^{-1}AM$.

Per far ciò consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A rispetto alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$.

Dobbiamo trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia C .

Dal momento che ambedue le matrici hanno come autovalore 1, ci conviene considerare le matrici $A' = A - I$ e $C' = C - I$. Abbiamo:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice $A - I$ è ovviamente la matrice associata all'endomorfismo $f_1 = f - I$ relativamente alla base canonica. Vogliamo trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f_1 relativamente ad essa sia $C - I$. Dobbiamo quindi trovare i tre vettori della nuova base in modo tale che si abbia:

$$\mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Ne segue che dobbiamo determinare un vettore $\mathbf{v}_3 \in \ker f_1^3 - \ker f_1^2$.

Osserviamo come si comportano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ rispetto a composizioni successive di f_1 . Abbiamo:

$$\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_2 \longrightarrow 2\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_3 \longrightarrow 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2 \longrightarrow 6\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Pertanto f_1^3 è l'endomorfismo nullo e $\ker f_1^3 = \mathbb{R}^3$.

Poniamo $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$.

Poniamo poi $\mathbf{v}_2 = f(\mathbf{v}_3) = 3\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = 6\mathbf{e}_1$.

Osserviamo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ poiché la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Abbiamo pertanto $C' = M^{-1}A_1M$ e quindi anche $C = M^{-1}AM$.