GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Fac simile d'esame
Tempo assegnato: Un'ora e mezza.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti] Sia dato un endomorfismo $f : E \longrightarrow F$ tra due spazi vettoriali su un campo $\mathbb{K}$ e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

1. L'omomorfismo f è surgettivo se e solo se $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è una base di F;
2. L'omomorfismo f è surgettivo se e solo se $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è un insieme di generatori di F.

SECONDO ESERCIZIO [12 punti]

Sia $\mathbb{R}^4[x]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore di 4.

1. Dimostrare che
$$V = \{p(x) \in R^4[x] \mid p(5) = 0\}$$
è un sottospazio vettoriale di $R^4[x]$ e determinarne una base.
2. Determinare un endomorfismo di $R^4[x]$ in modo tale che il nucleo coincida con V e l'immagine sia contenuta in V.
3. L'insieme degli endomorfismi di V verificanti le due condizioni precedenti è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale degli endomorfismi di $R^4[x]$? In caso affermativo determinarne una base.
4. Determinare la dimensione dello spazio vettoriale degli endomorfismi di $R^4[x]$.

TERZO ESERCIZIO [12 punti] Siano date le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Verificare se $A \sim B$. Nel caso positivo determinare una matrice $M \in GL(\mathbb{R}, 3)$ tali che $B = M^{-1}AM$.
2. Verificare se $A \sim C$. Nel caso positivo determinare una matrice $M \in GL(\mathbb{R}, 3)$ tali che $C = M^{-1}AM$.
3. Verificare se $B \sim C$. Nel caso positivo determinare una matrice $M \in GL(\mathbb{R}, 3)$ tali che $C = M^{-1}BM$.