GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 22 marzo 2007

Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti] Si considerino in $M(\mathbb{R}, n, n)$ le seguenti relazioni :

$A \approx B$ se e solo se A e B sono equivalenti per mezzo di operazioni elementari di riga

$A \sim B$ se e solo se A e B sono simili. Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

1. La relazione $\approx$ è una relazione di equivalenza
2. La relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza
3. $A \approx B \Rightarrow A \sim B$

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$:

$$V = \{A = (a_{ij}) \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 4\}$$

$$W = \{A = (a_{ij}) \mid a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0\}$$

1. Verificare se V è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$. In caso affermativo determinarne una base e un sottospazio vettoriale ad esso supplementare.
2. Verificare se W è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$. In caso affermativo determinarne una base e un sottospazio vettoriale ad esso supplementare.

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Sia E uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

Sia V il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

Sia W il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

1. Determinare un endomorfismo di E , diverso dall'endomorfismo identico, per il quale i sottospazi V e W sono invarianti.
2. Verificare se l'insieme H degli endomorfismi di E per i quali i sottospazi V e W sono invarianti è un sottospazio vettoriale dell'insieme degli endomorfismi di E . Nel caso in cui lo sia determinarne la dimensione.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Determinare una matrice B di Jordan simile alla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e determinare una matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.