GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 22 marzo 2007
Soluzioni

PRIMO ESERCIZIO [6 punti]

1. La relazione $\approx$ è una relazione di equivalenza. Per una dimostrazione si vedano le note del corso.

2. Dimostriamo che la relazione $\sim$ è una relazione di equivalenza. Sappiamo che $A \sim B$ se e solo se esiste una matrice Mtale che $B = M^{-1}AM$. Abbiamo

   - $A \sim A$ per ogni matrice A. Si considera infatti $M = I$.
   - $A \sim B \Rightarrow B = M^{-1}AM \Rightarrow A = MBM^{-1} \Rightarrow A = N^{-1}BN$ (si pone $N = M^{-1}$) $\Rightarrow B \sim A$
   - $A \sim B$ e $B \sim C \Rightarrow B = M^{-1}AM$ e $C = N^{-1}BN \Rightarrow$
     $\Rightarrow C = N^{-1}M^{-1}AMN \Rightarrow C = P^{-1}AP$ (si prende $P = MN$) $\Rightarrow A \sim C$.

3. L'affermazione $A \approx B \Rightarrow A \sim B$ è falsa. Controesempio. Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Si ha $A \approx B$ (infatti B si ottiene da A sottraendo alla prima riga di A la seconda riga di A). Ma $A \not\sim B$ perché l'unica matrice simile alla matrice B è la matrice B stessa.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

1. Si ha che V non è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ perché non contiene la matrice nulla.

2. Si ha che W è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$. Infatti:

   - La matrice nulla appartiene ovviamente a W.
   - Sia $A = (a_{ij}) \in W$ (quindi $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$).
     Sia $B = (b_{ij}) \in W$ (quindi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 0$).
     Sia $C = (c_{ij}) = A + B$. Quindi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
     Ma allora:
     $c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22} = a_{11} + b_{11} + a_{12} + b_{12} + a_{21} + b_{21} + a_{22} + b_{22} =$
     $= a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 0 + 0 = 0$. Pertanto $C \in W$.
   - Sia $A = (a_{ij}) \in W$ (quindi $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$).
     Sia $D = (d_{ij}) = hA$. Quindi $D_{ij} = ha_{ij}$.
     Ma allora:
     $d_{11} + d_{12} + d_{21} + d_{22} = ha_{11} + ha_{12} + ha_{21} + ha_{22} = h(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) = h0 = 0$. Pertanto $D \in W$.

Vogliamo determinare una base di W. Sia $A = (a_{ij}) \in W$ (quindi $a_{11} = -a_{12} - a_{21} - a_{22}$). Pertanto

$$W = \{A = \begin{pmatrix} -a-b-c & a \\ b & c \end{pmatrix}\}$$

Una base di W è data quindi da:

$$\left\{A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

La dimensione di W è quindi uguale a 3. Un sottospazio F supplementare di W ha quindi dimensione uguale a 1 poiché la dimensione di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ è uguale a 4. Determiniamo allora un supplementare F dandone una base. Per far ciò consideriamo una matrice non appartenente a W. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non appartiene a W.

TERZO ESERCIZIO [**8 punti**] Sia E uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.
Sia V il sottospazio vettoriale di V avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.
Sia W il sottospazio vettoriale di V avente come base $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$.

1. L'endomorfismo f di E tale che:
$f(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 \ , \ f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 \ , \ f(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_4 \ , \ f(\mathbf{e}_4) = \mathbf{e}_3$ verifica le condizioni richieste. Infatti tutti i vettori della base di V hanno come immagini vettori di V e tutti i vettori della base di W hanno come immagini vettori di W.

2. Sappiamo che un endomorfismo f ha come sottospazi invarianti V e W se e solo se la matrice associata a f relativamente alla base assegnata di E è una matrice formata da due blocchi di ordine 2.
Pertanto la matrice associata ad un tale endomorfismo deve essere del tipo:
$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$
Consideriamo quindi l'isomorfismo $\eta : End(E) \longrightarrow M(R, 4, 4)$ che associa ad un endomorfismo f la sua matrice associata rispetto alla base assegnata. L'immagine dell'insieme H è data da:
$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} \right\}$$
Abbiamo che H' è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbf{R}, 4, 4)$. Infatti:
a) la matrice nulla appartiene a H';

b) la somma di due matrici a blocchi è una matrice a blocchi;
c) una matrice a blocchi moltiplicata per uno scalare è una matrice a blocchi.

Inoltre, poiché H' è un sottospazio vettoriale, allora $\eta^{-1}(H') = H$ è un sottospazio vettoriale di $End(E)$. Essendo η un isomorfismo, la dimensione di H è uguale alla dimensione di H. Quest'ultima è uguale a 8 poiché le seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

formano chiaramente una base di H'.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Vogliamo jordanizzare la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia η l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 3 su R associato alla matrice A relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.
L'endomorfismo η ha come autovalore $\lambda_1 = 2$ con molteplicità algebrica uguale a 3. Pertanto l'endomorfismo η è jordanizzabile. La sua jordanizzata sarà formata da uno, due o tre blocchi di Jordan relativi all'autovalore 2. Per determinare il numero di blocchi della jordanizzata di A, calcoliamo la molteplicità geometrica di 2, cioè la dimensione dell'autospazio di eta relativo all'autovalore 2. Si ha:

$$E(\eta, \lambda_1) = \ker(\eta - \lambda_1 I)$$

La matrice associata a $\eta_1 = \eta - \lambda_1 I$ relativamente alla base data è:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Il rango di di $A - 1$ è uguale a 2, quindi la dimensione dell'autospazio è uguale a 1. Ne segue che la jordanizzata di A è formata da un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Dobbiamo determinare M tale che $B = M^{-1}AM$. Per far ciò usiamo il solito metodo. Cerchiamo una matrice M tale che $B_1 = B - 2I = M^{-1}A_1M$. Abbiamo

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Per calcolare M dobbiamo trovare quindi una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a $\eta_1 = \eta - 2I$ relativamente ad essa sia la matrice B_1. Pertanto si deve avere:

$$\mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

dove le frecce rappresentano l'endomorfismo η_1.
Prendiamo quindi un vettore $\mathbf{v}_3 \in \ker\eta_1^3 - \ker\eta_1^2$.
Analizzando la matrice A_1^2 si nota che possiamo porre $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1$. Poniamo poi $\mathbf{v}_2 = \eta_1(\mathbf{v}_3) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{v}_1 = \eta_1^2(\mathbf{v}_3) = 6\mathbf{e}_3$.
Osserviamo che il deterinante della seguente matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diverso da 0. Pertanto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata ad η_1 relativamente a tale base è la matrice B_1. Inoltre

$$B_1 = M^{-1} A_1 M$$

con Si ha infine $B = M^{-1} A M$.