GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 19 aprile 2007
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti] Calcolare il rango della matrice A di ordine 200 definita da $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j + 100$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti] Sia U uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$. Sia $f : U \longrightarrow V$ l'omomorfismo tale che:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 \quad f(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3$$

$$f(\mathbf{u}_3) = 2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3 \quad f(\mathbf{u}_4) = 4\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + 12\mathbf{v}_3$$

1. Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
2. Determinare una base di $f(U)$
3. Determinare una base di $\ker f$.
4. Determinare, se esiste, un omomorfismo non nullo $g : V \longrightarrow W$ tale che l'omomorfismo $g \circ f$ sia l'omomorfismo nullo.

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Sia U uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ Dimostrare la verità o falsità di ognuna delle seguenti affermazioni:

1. Dato comunque un omomorfismo $f : U \longrightarrow V$ non esiste mai un omomorfismo $g : V \longrightarrow W$ tale che l'omomorfismo $g \circ f$ sia un isomorfismo.
2. Dato comunque un omomorfismo $f : U \longrightarrow V$ esiste sempre un omomorfismo $g : V \longrightarrow W$ tale che l'omomorfismo $g \circ f$ sia un isomorfismo.
3. Per alcuni omomorfismi $f : U \longrightarrow V$ esiste un omomorfismo $g : V \longrightarrow W$ tale che l'omomorfismo $g \circ f$ sia un isomorfismo; per altri omomorfismi $f : U \longrightarrow V$ no.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare tutte le matrici di Jordan simili alla matrice A.
2. Fissata una matrice di Jordan B simile alla matrice A, determinare una matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.
3. Determinare tutte le matrici M tali che $B = M^{-1}AM$.