

GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE

Prova scritta del 11 luglio 2007

Tempo assegnato: 1 ora e 30 minuti.

PRIMO ESERCIZIO [6 punti] Sia $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{R}, 10, 10)$ di rango uguale a 5. Calcolare il rango della matrice $B = (b_{ij})$ dove $b_{ij} = 5a_{ij}$.

SECONDO ESERCIZIO [12 punti] Sia U uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Sia W uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$. Sia $f : U \longrightarrow V$ l'omomorfismo tale che:

$$f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 \quad f(\mathbf{u}_2) = 5\mathbf{v}_1 + 7\mathbf{v}_2 + 8\mathbf{v}_3$$

$$f(\mathbf{u}_3) = 2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 6\mathbf{v}_3 \quad f(\mathbf{u}_4) = 3\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 + 9\mathbf{v}_3$$

1. Determinare la matrice associata a f relativamente alle basi $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
2. Determinare una base di $f(U)$.
3. Determinare una base di $\ker f$.
4. Determinare, se esiste, un omomorfismo $g : V \longrightarrow W$ tale che l'omomorfismo $g \circ f$ abbia il nucleo di dimensione uguale a 3.

TERZO ESERCIZIO [12 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare tutte le matrici di Jordan simili alla matrice A .
2. Fissata una matrice di Jordan B simile alla matrice A , determinare una matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.
3. Determinare tutte le matrici M tali che $B = M^{-1}AM$.