GEOMETRIA E ALGEBRA
INGEGNERIA GESTIONALE
Soluzione del terzo facsimile d'esame

PRIMO ESERCIZIO Dimostriamo innanzitutto che se f è un isomorfismo di E allora $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è una base di E.
Sappiamo che i vettori $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$ sono generatori di $f(E)$. Inoltre f, essendo un isomorfismo, è in particolare surgettivo, e quindi $f(E) = E$. Ne segue che i vettori $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$ sono generatori di E. Ma la dimensione di E è uguale a n e quindi gli n generatori sono linearmente indipendenti. Essi formano quindi una base di E.
Dimostriamo ora che, se $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è una base di E, allora f è un isomorfismo.
I vettori $f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n)$ sono generatori di $f(E)$, quindi, dal momento che, per ipotesi sono una base di E, allora $f(E) = E$.
Dalla formula $\dim E = \dim f(E) + \dim \ker f$ e dal fatto che $f(E) = E$ segue che si ha $\dim \ker f = 0$ e quindi f, oltre ad essere surgettivo, è iniettivo; pertanto f è un isomorfismo.

SECONDO ESERCIZIO
La derivata di un polinomio di $\mathbb{R}^5[x]$ è un polinomio di $\mathbb{R}^5[x]$, quindi $d \ : \ \mathbb{R}^5[x] \longrightarrow \mathbb{R}^5[x]$. La funzione derivata d ha le seguenti proprietà:

$$d(p(x) + q(x)) = d(p(x)) + d(q(x))$$

$$d(kp(x)) = kd(p(x)$$

Pertanto d è un endomorfismo di $\mathbb{R}^5[x]$. Abbiamo

$$d(1) = 0 \ , \ d(x) = 1 \ , d(x^2) = 2x \ , d(x^3) = 3x^2 \ , \ d(x^4) = 4x^3$$

Pertanto la matrice associata a d relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5[x]$ è:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice A ha come autovalore $\lambda = 0$ con molteplicità algebrica uguale a 5 e molteplicità geometrica uguale a $5 - \text{rk } A = 5 - 4 = 1$.
Pertanto l'endomorfismo d non è derivabile.

TERZO ESERCIZIO
Osserviamo che la matrice B è una matrice di Jordan avente due blocchi di ordine 2.
Il primo blocco, B_1 è relativo all'autovalore 1.
Il secondo blocco B_2 è relativo all'autovalore 2.
Consideriamo l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ associato alla matrice A relativo alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$.
Osserviamo che la matrice A è una matrice formata da due blocchi di ordine 2. Pertanto abbiamo $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$, con V sottospazio avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e W sottospazio avente come base $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. I sottospazi V e W sono invarianti rispetto a f.

La matrice associata a $f_1 = f|_V$ relativo alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è uguale al primo blocco A_1 di A.
La matrice associata a $f_2 = f|_W$ relativo alla base $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ è uguale al secondo blocco A_2 di A.
Mostriamo che la matrice A_1 è simile alla matrice B_1.
Per far ciò, mostriamo che la matrice $A'_1 = A_1 - I$ è simile alla matrice
$B'_1 = B_1 - I$. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo considerare la matrice A' come la matrice associata all'endomorfismo $f_1 - I$ relativa alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di V. Consideriamo il vettore $\mathbf{e}_2$. Abbiamo $\mathbf{v}_2 = (f_1 - I)(\mathbf{e}_2) = 5\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1$ e $(f_1 - I)5(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}$.
Osserviamo che, poiché

$$N_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, i vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ formano una base di V. La matrice associata a $f_1 - 3I$ relativa a tale base è la matrice B'_1. Segue che la matrice associata a f_1 relativa alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ è la matrice B_1.
Mostriamo che la matrice A_2 è simile alla matrice B_2.
Per far ciò mostriamo che la matrice $A'_2 = A_2 - 2I$ è simile alla matrice
$B'_2 = B_2 - 2I$. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Possiamo considerare la matrice A'_2 come la matrice associata all'endomorfismo $f_2 - 2I$ relativa alla base $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$ di V. Consideriamo il vettore $\mathbf{v}_4 = \mathbf{e}_4$. Abbiamo $\mathbf{v}_3 = (f_2 - 2I)(\mathbf{e}_4) = 2\mathbf{e}_3$ e $(f_2 - I)2(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$.
Osserviamo che, poiché

$$N_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile, i vettori $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ formano una base di w. La matrice associata a $f_2 - 2I$ relativa a tale base è la matrice B'_2. Segue che la matrice associata a f_2 relativa alla base $\{\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è la matrice B_1.
Da tutto ciò segue che la matrice associata ad f relativa alla base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ è la matrice B. Si ha pertanto $B = M^{-1}AM$ con

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$