

GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Terzo fac-simile d'esame

Tempo assegnato: Un'ora e mezza.

PRIMO ESERCIZIO [8 punti] Dimostrare il seguente teorema:

Sia dato uno spazio vettoriale E su un campo $\mathbb{K}$ avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e un endomorfismo f di E . L'endomorfismo f è un isomorfismo se e solo se $\{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)\}$ è una base di E .

SECONDO ESERCIZIO [10 punti]

Sia $\mathbb{R}^5[x]$ lo spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ dei polinomi di grado minore di 5.

1. Dimostrare che la funzione d che associa ad ogni vettore di $\mathbb{R}^5[x]$ la sua derivata è un endomorfismo di $\mathbb{R}^5[x]$.
2. Determinare la matrice A associata a d relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^5[x]$.
3. La matrice A è diagonalizzabile? In caso affermativo determinare la sua diagonalizzata. In caso negativo spiegare perché.

TERZO ESERCIZIO [12 punti] Siano date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare, se esiste, una matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.