Giuseppe Accascina

Note del corso di Geometria e Algebra

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Gestionale
Anno Accademico 2007-2008

Istruzioni per l'uso

Faremo spesso riferimento a ciò che è stato introdotto nel corso di Geometria del primo anno.
Useremo il simbolo [Accascina, Monti] per indicare le dispense *Note del corso di Geometria* di Giuseppe Accascina, Valerio Monti (quando necessario indicheremo anche l'anno del corso).

In queste dispense è contenuto ciò che il docente dice a lezione. Sono suddivise in capitoli. Ciascuno dei capitoli corrisponde in linea di massima a una lezione ed una esercitazione, per un tempo totale di circa due ore.

Alcuni capitoli, purtroppo non tutti, sono organizzati in modo tale da guidare il più possibile lo studente nello studio.
Il primo capitolo è uno di questi. In esso sono intervallati numerosi esercizi (che chiameremo d'ora in poi *esercizi di base*). Consigliamo di non proseguire la lettura senza aver prima risolto l'esercizio di base assegnato. L'esercizio è stato inserito proprio per far comprendere al lettore se ha capito o meno quel che ha letto in precedenza. Inoltre spesso l' esercizio di base viene utilizzato successivamente. Una volta risolto l'esercizio è bene controllarne la risoluzione. Le risoluzioni degli esercizi del capitolo sono scritte nel quartultimo paragrafo del capitolo. Anche la risoluzione dell'esercizio è parte integrante del testo: spesso viene utilizzata successivamente. Nel terzultimo paragrafo di ogni capitolo, che chiamiamo *sunto*, vengono messi in evidenza gli argomenti principali svolti nel capitolo. Consigliamo di leggere con cura anche questo paragrafo. Quando sarà necessario richiamare argomenti studiati nei capitoli precedenti, di norma rimanderemo al sunto.

Non basta aver saputo svolgere un esercizio di un certo tipo per essere sicuri di saper risolvere esercizi dello stesso tipo. Occorre "allenarsi". Con l'allenamento si acquista sicurezza e velocita. Per questa ragione nel penultimo paragrafo di ogni capitolo, sono stati inseriti un certo numero di esercizi di "allenamento" che chiameremo semplicemente *esercizi*. Consigliamo di svolgere questi esercizi. Nell'ultimo paragrafo del capitolo sono scritte le soluzioni di quasi tutti gli esercizi.

Capitolo 1

Applicazioni dell'algoritmo di Gauss

NOTA. Questo capitolo è stato tratto da *Note del corso di Geometria* per Ingegneria Gestionale, Laurea triennale, scritte da Giuseppe Accascina e Valerio Monti. Nella Laurea triennale tutto ciò viene svolto in minima parte.

1.1 Introduzione

Nel corso di Geometria del primo anno della Laurea triennale abbiamo descritto l'algoritmi di Gauss e abbiamo visto la sua efficacia per la determinazione delle soluzioni di sistemi di equazioni lineari.

Per mezzo di questo algoritmo si sostituisce un sistema con uno ad esso equivalente avente la matrice dei coefficienti a scalini.

Con l'algoritmo di Gauss possiamo quindi ottenere, a partire da una qualsiasi matrice, una matrice a scalini. Ebbene, quest'ultima matrice ha lo stesso rango della matrice originaria.

Vedremo che è molto semplice calcolare il rango di una matrice a scalini. Tutto ciò ci dà un algoritmo per determinare il rango di una matrice. Esso, per matrici grandi, è molto più efficace dell'algoritmo studiato in precedenza che, come sappiamo, si basa sul calcolo dei determinanti dei minori della matrice.

In particolare possiamo ottenere, con il procedimento di Gauss, a partire da una matrice quadrata, una matrice a scalini. Il determinante di quest'ultima è uguale od opposto al determinante della matrice originaria.

Ricordiamo che una matrice quadrata a scalini è una particolare matrice triangolare e che il determinante di una matrice triangolare uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Tutto ciò ci dà un algoritmo per la determinazione del determinante di una matrice quadrata che è estremamente efficace nel caso in cui l'ordine della matrice sia alto.

Per fare tutto ciò dobbiamo introdurre il concetto di operazione elementare su una matrice. Faremo ciò nel prossimo paragrafo. Nel terzo e quarto paragrafo illustreremo gli algoritmi di Gauss per la determinazione del rango di una qualsiasi matrice e del determinante di una qualsiasi matrice quadrata.

1.2 Operazioni elementari

Nel capitolo 9 di [Accascina, Monti] è descritto l'algoritmo di Gauss.
Siamo in grado, per mezzo di esso, di sostituire ad un qualsiasi sistema un altro sistema ad esso equivalente la cui matrice dei coefficienti sia a scalini. Per far ciò abbiamo utilizzato due tipi di operazioni. Il primo consiste nel sommare ad una equazione del sistema un'altra equazione del sistema moltiplicata per un numero reale. Il secondo consiste nello scambiare tra loro due equazioni del sistema. In corrispondenza a ciò la matrice del sistema varia per mezzo di una delle operazioni seguenti:

- Sommare alla riga r-esima della matrice k volte la riga s-esima, con $s \neq r$ e k numero reale.

- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi due tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**.

Esempio 1.1 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 6 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vogliamo ottenere a partire da questa matrice una matrice a scalini applicando successivamente alcune operazioni elementari di riga secondo l'algoritmo di Gauss. Come prima cosa sommiamo alla terza riga la prima moltiplicata per -2. Otteniamo la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo tra loro la seconda e la terza riga della matrice A'. Otteniamo la matrice a scalini:

$$A'' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio di base EB.1.1 Dimostrare che si può passare dalla matrice A'' alla matrice A per mezzo di operazioni elementari di riga. △

Si può generalizzare tutto ciò. Si può dimostrare (lo vedremo tra poco) che, se si può passare da una matrice A ad una matrice A' per mezzo di successive operazioni elementari di riga, allora si può passare dalla matrice A' alla matrice A per mezzo di operazioni elementari di riga. Questo suggerisce la:

Definizione 1.2 Una matrice A si dice **equivalente per riga** ad una matrice A' se è possibile passare da A a A' per mezzo di un numero finito di operazioni elementari di riga. △

Proposizione 1.3 *La relazione di equivalenza per riga ha le seguenti tre proprietà:*
riflessiva*: ogni matrice A è equivalente per righe a se stessa;*
simmetrica*: se A è equivalente per righe a B, allora B è equivalente per righe a A;*
transitiva*: se A è equivalente per righe a B e B è equivalente per righe a C, allora A è equivalente per righe a C.*

DIMOSTRAZIONE **riflessiva**. Notiamo che, sommando ad una riga di una matrice un'altra riga moltiplicata per 0, si ottiene la matrice stessa. Pertanto ogni matrice è equivalente per righe a se stessa.
simmetrica. Dimostriamo dapprima ciò nel caso in cui si passa da una matrice A a B per mezzo di una sola operazione elementare di riga. Se l'operazione è il sommare alla riga r-sima la riga s-sima moltiplicata per h, si passa da B a A sommando alla riga r-sima la riga s moltiplicata per $-h$.
Se invece l'operazione è lo scambiare tra loro due righe, si passa da B a A scambiando di nuovo tra loro le stesse righe.
Nel caso in cui si passa da A a B con più di una operazione, si passa da B ad A facendo il procedimento a ritroso. Si parte dall'ultima operazione e via via si arriva alla prima.
transitiva. Segue dalla definizione. ■

Vogliamo ora dare una descrizione differente delle operazioni elementari di riga. Cominciamo con un esempio:

Esempio 1.4 Consideriamo la matrice identica di ordine 2:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo alla prima riga la seconda riga moltiplicata per un numero reale h. Otteniamo la matrice:

$$I_h(1,2) := \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo utilizzato il simbolo $I_h(1,2)$ per ricordarci che è ottenuta dalla matrice I sommando alla prima riga la seconda moltiplicata per h. Notiamo che

$$\det I_h(1,2) = 1.$$

Consideriamo ora una matrice A tale che si possa fare il prodotto

$$I_h(1,2)A.$$

La matrice A dovrà necessariamente avere due righe. Sia, per esempio, A una generica matrice di tipo $(2,3)$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Calcoliamo il prodotto $I_h(1,2)A$:

$$A' := I_h(1,2)A = \begin{pmatrix} a_{11} + ha_{21} & a_{12} + ha_{22} & a_{13} + ha_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

La matrice A' non è altro che la matrice ottenuta dalla matrice A sommando alla prima riga la seconda riga moltiplicata per h.

Quindi, moltiplicando a sinistra una matrice A per la matrice $I_h(1,2)$ si applica alla matrice A la stessa operazione elementare che si è applicata alla matrice I per ottenere la matrice $I_h(1,2)$. △

Vogliamo ora generalizzare quanto visto.

Notazione 1.5 Sia I la matrice identica di ordine n e sia $I_h(r,s)$, con $r \neq s$, la matrice ottenuta da I sommando alla r-esima riga la s-riga moltiplicata per h. △

Proposizione 1.6 *Si ha*

$$\det I_h(r,s) = 1.$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.1.2 Dimostrare il teorema precedente. △

Abbiamo poi la:

Proposizione 1.7 *Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A sommando alla r-esima riga di A la s-esima riga di A moltiplicata per h. Allora $A' = I_h(r,s)A$.*

DIMOSTRAZIONE Per definizione, la matrice $I_h(r,s)$ è data da:

$$I_h(r,s:) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & h & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Quindi:

$$I_h(r,s) := (\gamma_{ij}) \qquad \text{con } \gamma_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ h & \text{se } i = r, j = s \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Notiamo che, nella rappresentazione appena fatta della matrice $I_h(r,s)$, abbiamo implicitamente supposto $r < s$. In tal caso $I_h(r,s)$ è triangolare superiore. Se invece si ha $r > s$, essa è triangolare inferiore. In ambedue i casi si ha che il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale. Quindi

$$\det I_h(r,s) = 1.$$

Dimostriamo ora che la matrice $A' = I_h(r,s)A$ è uguale alla matrice ottenuta da A sommando alla r-esima riga di A la s-esima riga di A moltiplicata per h. Si ha:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & h & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rj} & \dots & a_{rq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & \dots & a_{sj} & \dots & a_{sq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nq} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo il generico elemento c_{ij} della matrice A'. Si ha:

$$c_{ij} = \gamma_{i1}a_{1j} + \cdots + \gamma_{ii}a_{ij} + \cdots + \gamma_{in}a_{nj}.$$

Notando come sono gli elementi γ_{ik}, distinguiamo due casi: $i \neq r$ e $i = r$. Per $i \neq r$ abbiamo, per ogni j:

$$c_{ij} = \underbrace{\gamma_{i1}}_{=0} a_{1j} + \cdots + \underbrace{\gamma_{ii}}_{=1} a_{ij} + \cdots + \underbrace{\gamma_{in}}_{=0} a_{nj} = a_{ij}.$$

Dunque gli elementi di A' sulle righe diverse dalla r-esima coincidono con i corrispondenti elementi di A.

Per $i = r$ abbiamo, per ogni j:

$$c_{rj} = \underbrace{\gamma_{r1}}_{=0} a_{1j} + \cdots + \underbrace{\gamma_{rr}}_{=1} a_{rj} + \cdots + \underbrace{\gamma_{rs}}_{=h} a_{sj} + \cdots + \underbrace{\gamma_{rn}}_{=0} a_{nj} = a_{rj} + ha_{sj}.$$

Dunque un elemento di A' sulla riga r-esima è uguale alla somma dell'elemento di A nella stessa posizione e di h volte l'elemento di A che sta sulla riga s-esima e nella medesima colonna. In altri termini la riga r-esima di A' è uguale alla somma della riga r-esima di A e di h volte la riga s-esima di A, come volevamo.■

Vogliamo ora analizzare più in dettaglio l'operazione elementare di scambio di due righe. Cominciamo con un esempio:

Esempio 1.8 Prendiamo la matrice identica di ordine 3:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiamo tra loro le ultime due righe. Otteniamo:

$$I(2,3) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo usato il simbolo $I(2,3)$ per ricordarci che abbiamo scambiato tra loro la seconda e terza riga.

Notiamo che:

$$\det I(2,3) = -1.$$

Consideriamo ora una generica matrice A di tipo $(3,2)$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

moltiplicandola a sinistra per la matrice $I(2,3)$ otteniamo:

$$A' := I(2,3)A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice A' è quindi ottenuta dalla matrice A scambiando tra loro la seconda e terza riga.

Quindi, moltiplicando a sinistra una matrice A per la matrice $I(2,3)$ si applica alla matrice A la stessa operazione elementare che si è applicata alla matrice I per ottenere la matrice $I(2,3)$. △

Anche in questo caso si generalizza tutto ciò.

Notazione 1.9 Sia I la matrice identica di ordine n e sia $I(r,s)$, con $r \neq s$, la matrice ottenuta da I scambiando la riga r-esima riga con la s-riga. △

Proposizione 1.10 *Il determinante di $I(r,s)$ è uguale a -1.*

Dimostrazione Dimostriamo il teorema per induzione sull'ordine n della matrice $I(r,s)$.
Se $n = 2$ allora le uniche due righe che si possono scambiare sono le righe 1 e 2. Si ha allora:

$$I(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si ha ovviamente $det I(1,2) = -1$.
Sia ora $n = 3$. Calcoliamo il determinante di $I(r,s)$ sviluppandolo rispetto alla

riga diversa dalle righe r es. Sia essa la riga i sima. Questa riga ha tutti gli elementi uguali a 0 fuorché l'elemento di posto i, i che è uguale a 1. Pertanto il determinante della matrice è uguale a -1^{i+i} moltiplicato per il determinante della matrice ottenuta dalla matrice $I(r,s)$ togliendo la i-sima e la i-sima colonna. Quest'ultima matrice non è altro che la matrice $I(1,2)$ studiata nel caso $n = 2$. Pertanto $\det I(r,s) = -1$.
Per $n > 3$ si calcoli il determinante della matrice $I(r,s)$ in modo analogo al precedente. ∎

Abbiamo poi la

Proposizione 1.11 *Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A scambiando tra loro le righe r-esima e s-esima. Allora $A' = I(r,s)A$.*

Dimostrazione La dimostrazione della proposizione precedente è analoga alla dimostrazione scritta della proposizione 1.7. Viene quindi lasciata per esercizio. ∎

In definitiva abbiamo visto che, se una matrice A' è ottenuta da una matrice A per mezzo di un'operazione elementare di riga, allora si ha

$$A' = KA$$

dove K è una matrice del tipo $I_h(r,s)$ oppure del tipo $I(r,s)$ a seconda se l'operazione elementare che abbiamo applicato è la somma ad una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore oppure uno scambio di righe.

Abbiamo pertanto la

Proposizione 1.12 *Se la matrice A è equivalente per righe alla matrice A' allora si ha*

$$A' = KA$$

essendo $K := K_m K_{m-1} \dots K_2 K_1$ e le matrici $K_1, K_2, \dots, K_m$ sono del tipo $I_h(r,s)$ o del tipo $I(r,s)$.
Inoltre la matrice K ha determinante uguale a 1 o a -1.

Dimostrazione L'ultima affermazione sul determinante della matrice K deriva dal fatto che ciascuna delle matrici K_i ha determinante uguale a 1 o a -1 e dal teorema di Binet.
Ricordiamo che il teorema di Binet dice che si ha:

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Esempio 1.13 Consideriamo la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Se sommiamo alla terza riga la seconda riga moltiplicata per -2 otteniamo la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Dunque si ha $A' = I_{-2}(3,2)A$. Ora scambiamo la prima e seconda riga di A':

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Si ha allora $A'' = I(1,2)A'$. Pertanto $A'' = I(1,2)I_{-2}(3,2)A = KA$, dove K è la matrice:

$$K := I(1,2)I_{-2}(3,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

△

Esercizio di base EB.1.3 Sia A una matrice equivalente per righe a B. Allora $B = KA$, con K prodotto di matrici del tipo $I(_h(r,s)$ e $I(r,s)$.
Sappiamo che allora si ha che B è equivalente per righe alla matrice A e quindi $A = HB$ con H prodotto di matrici del tipo $I(_h(r,s)$ e $I(r,s)$.
Determinare i fattori della matrice H. △

Supponiamo ora di avere due matrici quadrate A e A' equivalenti per riga. Dunque sappiamo che $A' = KA$ dove K è il prodotto di un numero finito di matrici elementari. Poiché abbiamo già osservato che la matrice K ha determinante 1 o -1, dal teorema di Binet possiamo affermare che $\det A' = \det A$ o $\det A' = -\det A$. Più precisamente:

Proposizione 1.14 *Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, consideriamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A': tra queste ci saranno un certo numero di operazioni di somma ad una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore e un certo numero m di operazioni di scambio di righe. Si ha allora:*

$$\det A' = (-1)^m \det A.$$

Esercizio di base EB.1.4 Dimostrare la proposizione 1.14. △

Un caso particolarmente interessante è quello in cui si ha una matrice quadrata A con una riga (diciamo la r-esima) uguale a k volte un'altra riga (diciamo la s-esima). Allora, sommando alla r-esima riga di A la s-esima moltiplicata per $-k$, otteniamo una matrice A' la cui r-esima riga è nulla, e, dunque A' ha determinante nullo. Poiché $\det A = \det A'$, abbiamo $\det A = 0$.

Sfruttando il fatto che il determinante di una matrice e della sua trasposta sono uguali si può anche dimostrare una proprietà analoga per le colonne. Abbiamo dunque la:

Proposizione 1.15 *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Se una riga di A è multipla di un'altra riga di A allora* $\det A = 0$ *(in particolare se A ha due righe uguali abbiamo che* $\det A = 0$*);*

2. *Se una colonna di A è multipla di un'altra colonna di A allora* $\det A = 0$ *(in particolare se A ha due colonne uguali abbiamo che* $\det A = 0$*).*

Esempio 1.16 Si consideri la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 8 & 4 & 0 \\ 12 & -24 & 13 & -2 & 1 \\ -3 & 9 & -12 & -6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Notiamo che la quarta riga di A è $-\frac{3}{2}$ la seconda. Dunque $\det A = 0$. △

Una interessante conseguenza della proposizione 1.14 è data dal:

Teorema 1.17 *Se A e A' sono matrici (non necessariamente quadrate) equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:*

$$\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A.$$

A prima vista la dimostrazione appare molto semplice. Infatti per calcolare il rango di una matrice, interessa vedere solamente se i determinanti dei minori sono uguali a 0 o diversi da 0 ed abbiamo visto che i determinanti di matrici quadrate equivalenti per riga differiscono al più per il segno. In effetti la dimostrazione non è semplice come appare. Supponiamo infatti di avere ottenuto la matrice A' dalla matrice A sommando alla riga r-sima la riga s-sima. Supponiamo ora di dover calcolare il determinante di un minore di A' che comprenda la riga r-sima ma non la riga s-sima. Ebbene questo minore di A' non è ottenuto dal corrispondente minore di A sommando alla r-sima riga un'altra sua riga.
La dimostrazione del teorema viene pertanto omessa.

1.3 Calcolo del rango

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che matrici equivalenti per riga hanno lo stesso rango. Quindi, se dobbiamo calcolare il rango di una matrice possiamo considerare una matrice ad essa equivalente per righe e sperare che il calcolo del rango di questa nuova matrice sia facile. In particolare, sappiamo che con il metodo di Gauss è possibile, data una matrice A, determinare una matrice a scalini equivalente per righe alla matrice A. Ci chiediamo se questo ci aiuta, cioè se sia facile determinare il rango di una matrice a scalini. Consideriamo allora qualche esempio:

Esempio 1.18 Consideriamo la matrice a scalini:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A ha 3 scalini. Consideriamo ora il minore di A formato dalle righe non nulle di A e dalle tre colonne contenenti gli scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo minore è una matrice triangolare superiore:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale principale ed è quindi diverso da 0. Pertanto A ha rango almeno 3. D'altra parte ogni minore di A di ordine 4 deve avere una riga tutta di 0 ed ha pertanto determinante nullo. Dunque $\operatorname{rk} A = 3$, cioè il rango di A è uguale al numero degli scalini. $\triangle$

Quanto visto nell'esempio 1.18 non è un caso. Utilizzando lo stesso approccio si dimostra la seguente:

Proposizione 1.19 *Il rango di una matrice a scalini è uguale al numero degli scalini (cioè il numero di righe non nulle) della matrice.*

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Tutto ciò ci suggerisce un algoritmo per il calcolo del rango di una matrice.

Algoritmo 1.20 (di Gauss per il calcolo del rango) Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A.

2. Contiamo il numero di scalini di A'. Siano n. Si ha allora:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = n.$$

$\triangle$

Esempio 1.21 Calcoliamo il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si lascia come esercizio di verificare che la seguente matrice a scalini A' è equivalente alla matrice A.

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A' ha 3 scalini. Quindi $\operatorname{rk} A = 3$. △

Esempio 1.22 Vogliamo determinare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Cominciamo con il sommare alla terza riga la prima e alla quarta riga -2 volte la prima:

$$A' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ora sommiamo alla terza riga della matrice A' 2 volte la seconda riga di A' e alla quarta riga -1 volte la seconda riga di A':

$$A'' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Infine scambiamo tra loro la terza e quarta riga della matrice A'' ottenendo una matrice a scalini:

$$A''' := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice così ottenuta ha 3 scalini ad ha, quindi, rango 3. Pertanto anche la matrice A ha rango 3. △

1.4 Calcolo del determinante

Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, dalla proposizione 1.14 sappiamo che:

$$\det A' = (-1)^m \det A$$

dove m è il numero di scambi di riga effettuati per passare dalla matrice A alla matrice A' (ovviamente oltre agli scambi di riga, per passare dalla matrice

A alla matrice A' può essere stato necessario effettuare più volte operazioni di somme di un multiplo di una riga ad un'altra riga ma queste non influenzano il segno del determinante).

Dunque se per passare da A ad A' è stato necessario effettuare un numero pari di scambi, la matrice A e A' hanno lo stesso determinante, altrimenti hanno determinante opposto. In entrambi i casi possiamo dedurre il determinante di A dal determinante di A'.

Utilizzando il metodo di Gauss possiamo ottenere da una matrice quadrata A una matrice quadrata a scalini ad essa equivalente per righe. È facile vedere che una matrice quadrata a scalini è triangolare superiore e, quindi, il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale.

Tutto ciò ci suggerisce un algoritmo per il calcolo del determinante di una matrice quadrata.

Algoritmo 1.23 (di Gauss per il calcolo del determinante) Data una matrice quadrata A, ne calcoliamo il determinante nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A, e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.

2. Calcoliamo il determinante di A' semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale. Notiamo che A' ha determinante 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.

3. Si ha quindi:
$$\det A = (-1)^m \det A'.$$
△

Esempio 1.24 Calcoliamo il determinante della matrice A:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo visto in 1.21 che la matrice A è equivalente alla seguente matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di A' è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale ed è, dunque, uguale a 1. Per passare da A ad A' non occorre fare alcun scambio di righe : il determinante di A è allora uguale al determinante di A' cioè:

$$\det A = \det A' = 1.$$
△

Esempio 1.25 Calcoliamo il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cerchiamo una matrice a scalini ad essa equivalente. Scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo alla quarta riga la seconda:

$$A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo ottenuto una matrice a scalini, equivalente per righe alla matrice A. La matrice A' ha determinante uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale, cioè 5. Per passare da A ad A' abbiamo operato un numero dispari di scambi di riga (cioè uno solo): il determinante di A è allora uguale all'opposto del determinante di A' cioè:

$$\det A = -\det A' = -5. \qquad \triangle$$

Esempio 1.26 Vogliamo calcolare il determinante della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Scambiamo la quarta riga con la prima:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Scambiamo la seconda riga con la terza:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sottraiamo alla quarta riga la seconda:

$$A' := \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A questo punto è inutile proseguire: anche se la matrice che abbiamo ottenuto non è a scalini (dovremmo fare un ulteriore passaggio) è comunque una matrice triangolare. Il suo determinante è uguale al prodotto degli elementi della sua diagonale principale. Poiché uno fra essi è 0, il determinante di A' è 0. Pertanto anche A ha determinante 0: infatti il determinante di A è uguale oppure opposto al determinante di A'. In questo caso non ci interessa quindi contare il numero di scambi utilizzati per passare da A ad A'. $\triangle$

1.5 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.1 Per ottenere la matrice A dalla matrice A' per mezzo di operazioni elementari di riga, facciamo il procedimento a ritroso. Scambiamo tra loro la seconda e la terza riga di A'. Sommiamo poi alla terza riga la prima riga moltiplicata per 2.

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.2 Osserviamo che se $r < s$ allora tutti gli elementi della matrice $I_h(r,s)$ che si trovano sotto la diagonale principale sono uguali a 0. Una matrice avente questa proprietà si dice **triangolare superiore**. Ebbene, tutte la matrici triangolari superiori hanno il determinante uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale. Si dimostra quest'ultima osservazione calcolando il determinante sviluppandolo secondo la prima colonna e calcolando i determinanti di tutti i minori sviluppandoli sempre secondo la prima colonna.
Se invece $r > s$ allora tutti gli elementi della matrice $I_h(r,s)$ che si trovano sopra la diagonale principale sono uguali a 0. Una matrice avente questa proprietà si dice **triangolare inferiore**. Ebbene, tutte la matrici triangolari inferiori hanno il determinante uguale al prodotto degli elementi della diagonale principale. Si dimostra quest'ultima osservazione calcolando il determinante sviluppandolo secondo la prima riga e calcolando i determinanti di tutti i minori sviluppandoli sempre secondo la prima riga.

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.3 Sia $B = K_m K_{m-1} \dots K_1 A$.
Si ha ovviamente $A = K_1^{-1} \dots K_{m-1}^{-1} K_m^{-1} B$.
Abbiamo poi $I_h(r,s)^{-1} = I_{-h}(r,s)$ e $I(r,s)^{-1} = I(r,s)$.

Soluzione dell'esercizio di base EB.1.4 Si ha:

$$A' = K_n K_{n-1} \dots K_2 K_1 A.$$

Dalle condizioni poste, sappiamo che m delle matrici K_n, ..., K_1 hanno determinante uguale a -1 mentre le altre hanno determinante uguale a 1. Applicando il teorema di Binet si ha quindi la tesi.

1.6 Sunto

1.6.1 Operazioni elementari

Definizione Due matrici A e A' si dicono **equivalenti per riga** se è possibile passare da una all'altra per mezzo di successive operazioni del tipo:

- Sommare alla riga r-esima della matrice k volte la riga s-esima, con $s \neq r$ e k numero reale.
- Scambiare tra loro due righe della matrice.

Questi due tipi di operazioni si dicono **operazioni elementari di riga**. $\triangle$

Proposizione *Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A sommando alla r-esima riga di A la s-esima riga di A moltiplicata per h. Allora $A' = I_h(r,s)A$, dove $I_h(r,s)$ è la matrice ottenuta dalla matrice identica I di ordine n sommando alla r-esima riga la s-riga moltiplicata per h.*

Proposizione *Sia A una matrice a n righe e q colonne e sia A' la matrice che si ottiene dalla matrice A scambiando tra loro le righe r-esima e s-esima. Allora $A' := I(r,s)A$, dove $I(r,s)$ è la matrice ottenuta dalla matrice identica di ordine n scambiando tra loro le righe r-esima e s-esima.*

Proposizione *Se A e A' sono matrici equivalenti per riga, allora si ha:*

$$A' = KA$$

dove K è una matrice prodotto di matrici del tipo $I_h(r,s)$ e del tipo $I(r,s)$.

Teorema *Se A e A' sono matrici equivalenti per riga, allora esse hanno ranghi uguali. In formule:*

$$\operatorname{rk} A' = \operatorname{rk} A.$$

Proposizione *Se A e A' sono matrici quadrate equivalenti per riga, consideriamo le operazioni elementari necessarie per passare da A ad A': tra queste ci saranno un certo numero di operazioni di somma ad una riga di un'altra riga moltiplicata per un fattore e un certo numero m di operazioni di scambio di righe. Si ha allora:*

$$\det A' = (-1)^m \det A.$$

Proposizione *Sia A una matrice quadrata.*

1. *Se una riga di A è multipla di un'altra riga di A allora* $\det A = 0$ *(in particolare se A ha due righe uguali abbiamo che* $\det A = 0$*);*
2. *Se una colonna di A è multipla di un'altra colonna di A allora* $\det A = 0$ *(in particolare se A ha due colonne uguali abbiamo che* $\det A = 0$*).*

1.6.2 Algoritmo per il calcolo del rango di una matrice

Algoritmo (di Gauss per il calcolo del rango) Data una matrice A, ne calcoliamo il rango nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A.

2. Contiamo il numero di scalini di A'. Siano n. Si ha allora:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = n.$$

△

1.6.3 Algoritmo per il calcolo del determinante di una matrice

Algoritmo (di Gauss per il calcolo del determinante) Data una matrice quadrata A, ne calcoliamo il determinante nel seguente modo:

1. Determiniamo, con l'algoritmo di Gauss, una matrice a scalini A' equivalente per righe ad A, e contiamo il numero di scambi di riga che abbiamo operato per far ciò. Sia m questo numero.

2. Calcoliamo il determinante di A' semplicemente moltiplicando gli elementi della sua diagonale principale. Notiamo che A' ha determinante 0 se e solo se almeno uno di questi elementi si annulla.

3. Si ha quindi:

$$\det A = (-1)^m \det A'.$$

△

1.7 Esercizi

Esercizio E.1.1 Verificare che la matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è equivalente per righe alla matrice I.

Esercizio E.1.2 Determinare una matrice a scalini B equivalente per righe alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

e determinare una matrice K tale che:

$$B = KA.$$

Esercizio E.1.3 Determinare una matrice a scalini B equivalente per righe alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

e determinare una matrice K tale che:

$$B = KA.$$

Esercizio E.1.4 Calcolare il determinante delle seguenti matrici:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.5 Calcolare il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ -9 & -16 & 4 & -10 & 22 \\ 9 & 24 & -6 & 15 & -33 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.6 Calcolare, con l'algoritmo di Gauss, il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 3 & 6 \\ 8 & 4 & 6 & 12 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.7 Calcolare, con l'algoritmo di Gauss, il rango della matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizio E.1.8

Calcolare, con l'algoritmo di Gauss, il rango della seguente matrice:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

1.8 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.1.1 È sufficiente scambiare la prima e la terza riga.

Soluzione dell'esercizio E.1.2 Innanzitutto sommiamo alla terza riga di A la prima riga moltiplicata per -4 e otteniamo così la matrice:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $A' := I_{-4}\,(3,1)\,A$. Ora scambiamo la seconda e terza riga di A' ed otteniamo la matrice a scalini:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $B = I\,(2,3)\,A'$ e, dunque, $B = I\,(2,3)\,I_{-4}\,(3,1)\,A$. Se poniamo allora $K := I\,(2,3)\,I_{-4}\,(3,1)$, abbiamo che $B = KA$. Calcoliamo esplicitamente la matrice K:

$$K = I\,(2,3)\,I_{-4}\,(3,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio E.1.3 Innanzitutto sommiamo alla seconda riga di A la prima riga moltiplicata per -2 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per -4 e otteniamo così la matrice a scalini:

$$B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo che $B := I_{-4}\,(3,1)\,I_{-2}\,(2,1)\,A$. Se poniamo $K := I_{-4}\,(3,1)\,I_{-2}\,(2,1)$ abbiamo che $A' = KA$. Calcoliamo esplicitamente la matrice K:

$$K = I_{-4}\,(3,1)\,I_{-2}\,(2,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione dell'esercizio E.1.4 La seconda riga di A è uguale a 2 volte la prima. Quindi A ha determinante 0.

La seconda colonna di B è uguale a 2 volte la terza. Quindi B ha determinante 0.

Sommiamo alla seconda riga di C la prima riga moltiplicata per -1 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per $-\frac{3}{2}$ e otteniamo così la matrice:

$$C' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo la seconda riga e la terza ed otteniamo la matrice a scalini:

$$C'' := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Il determinante di C''è uguale a -8. Per passare da C a C''abbiamo operato un numero dispari di scambi e, pertanto $\det C = -\det C'' = 8$.

Soluzione dell'esercizio E.1.5 Sommiamo alla seconda riga di A la prima riga moltiplicata per 3 e alla terza riga la prima riga moltiplicata per -3 e otteniamo così la matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 3 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 8 & -2 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché A' ha due scalini abbiamo che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 2$.

Soluzione dell'esercizio E.1.6 Sommiamo alla seconda riga di A la prima moltiplicata per $-\frac{3}{2}$, alla terza la prima moltiplicata per 2 e alla quarta la prima moltiplicata per -4:

$$A' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 4 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora sommiamo alla terza riga di A' la seconda moltiplicata per -8:

$$A'' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine sommiamo alla quarta riga di A'' la terza moltiplicata per $-\frac{2}{25}$ ed otteniamo la matrice a scalini:

$$A''' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{48}{25} \end{pmatrix}.$$

La matrice così ottenuta ha 4 scalini e, dunque, $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A''' = 4$.

Soluzione dell'esercizio E.1.7 Tramite le seguenti operazioni: scambio della prima e seconda riga, somma alla quarta riga -1 volte la prima, somma alla terza riga -1 volte la seconda, somma alla quarta riga $\frac{3}{2}$ volte la seconda, somma alla quarta riga $\frac{1}{2}$ volte la terza otteniamo la matrice a scalini:

$$A' := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Poiché A' ha 4 scalini, abbiamo che $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A' = 4$.

Soluzione dell'esercizio E.1.8 Applichiamo l'algoritmo di Gauss alla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo alla seconda riga -3 volte la prima, alla terza riga -4 volte la prima, alla quarta riga -1 volte la prima e alla quinta riga 2 volte la prima. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sommiamo ora alla terza riga -1 volte la seconda, alla quarta riga $-\frac{1}{3}$ volte la seconda e alla quinta riga $\frac{2}{3}$ volte la seconda. Otteniamo così una nuova matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Ora scambiamo di posto la terza e quarta riga:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e infine sommiamo alla quinta riga -1 volte la terza:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -10 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 3 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo dunque una matrice a scalini con tre righe non nulle. Il rango di A è dunque 3.