Capitolo 5

Dimensione di uno spazio vettoriale

5.1 Introduzione

Dedichiamo questo capitolo ad un concetto fondamentale in algebra lineare: la dimensione di uno spazio vettoriale.
Daremo una definizione che generalizza quella vista nel corso di geometria.
Prima di far ciò abbiamo bisogno di ricordare come si può estrarre da un numero finito di vettori il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

5.2 Vettori e matrici

Esempio 5.1 Consideriamo lo spazio vettoriale $R^3[x]$ e due suoi vettori (quindi polinomi) $\mathbf{v}_1 := 1 + x$ e $\mathbf{v}_2 = 2 + 3x + 4x^2$. Le coordinate di $\mathbf{v}_1$, relative alla base canonica di $R^3[x]$ sono $(1, 1, 0)$, mentre le coordinate di $\mathbf{v}_2$ sono $(2, 3, 4)$.
Consideriamo ora la combinazione lineare con coefficienti 2 e 5 dei due polinomi, cioè il polinomio $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$. Si ha:

$$2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 = 12 + 17x + 20x^2$$

Pertanto le coordinate di $2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2$ relative alla base canonica sono date da $(12, 17, 20)$.
Osserviamo che si ha:

$$(12, 17, 20) = (2 \cdot 1 + 5 \cdot 2, 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3, 2 \cdot 0 + 5 \cdot 4)$$

Abbiamo pertanto che le coordinate relative alla base canonica di $R^3[x]$ della combinazione lineare con coefficienti 2 e 5 dei vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono le combinazioni lineari con coefficienti 2 e 5 delle coordinate dei due vettori.
Consideriamo ora la base di Lagrange di $R^3[x]$ relativa ai punti $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.
Le coordinate di $\mathbf{v}_1$ relative a tale base sono $(1, 2, 3)$, mentre le coordinate di $\mathbf{v}_2$

sono $(2, 9, 24)$ (verificare questa affermazione facendo meno calcoli possibile).
Le coordinate relative alla base di Lagrange di $2v_1 + 5v_2$ sono $(12, 49, 126)$ (verificare anche questa affermazione facendo il minimo di calcoli possibile).
Si ha:

$$12 = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \ , \ 49 = 2 \cdot 2 + 5 \cdot 9 \ , \ 126 = 2 \cdot 3 + 5 \cdot 24$$

Anche in questo caso si ha che le coordinate del vettore combinazione lineare sono le combinazioni lineari delle coordinate.

Come è facile immaginarsi, ciò non è dovuto al caso. Si ha infatti il seguente teorema.

Teorema 5.2 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Dati s vettori di V, le coordinate, relative alla base data, di una combinazione lineare degli s vettori sono uguali alle combinazioni lineari delle coordinate degli s vettori.*

Dimostrazione La dimostrazione è abbastanza semplice se viene divisa in vari passi.

1. Dimostrare che, se i vettori v_1 e v_2 hanno coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ rispettivamente, allora il vettore v_1+v_2 ha coordinate $(a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n)$.
2. Dimostrare che, se il vettore v_1 ha coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$, allora il vettore h_1v_1 ha coordinate $(h_1a_1, \ldots, h_1a_n)$.
3. Dimostrare che, se i vettori v_1 e v_2 hanno coordinate $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$, allora il vettore $h_1v_1 + h_2v_2$ ha coordinate $(h_1a_1 + h_2b_1, \ldots, h_1a_n + h_2b_n)$.
4. Dimostrare che una formula analoga per le combinazioni lineari di 3 vettori.
5. Dimostrare una formula analoga per le combinazioni lineari di s vettori.

Tutte queste dimostrazioni vengono lasciate per esercizio. ■

Esercizio di base EB.5.1 Dimostrare i vari passi del teorema precedente. △

Supponiamo ora di avere uno spazio vettoriale V e una sua base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_n$.
Siano poi dati dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_s$. Può capitare di dover stabilire se essi siano linearmente indipendenti e, se non lo sono, di dover estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.
Vediamo come fare.

Calcoliamo, per ciascuno di essi, le sue coordinate rispetto alla base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_n$. Scriviamo cioè:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\
\mathbf{u}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{e}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{u}_s &= a_{1s}\mathbf{e}_1 + a_{2s}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{ns}\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

Scriviamo ora la matrice $A \in M(n, s, \mathbb{R})$ le cui **colonne** sono date dalle coordinate dei vettori $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_s$ rispetto alla base $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$,..., $\mathbf{e}_n$:

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{22} & \cdots & a_{ns} \end{pmatrix}$$

Dunque la prima colonna è data dalle coordinate di $\mathbf{u}_1$, la seconda colonna dalle coordinate di $\mathbf{u}_2$ e così via.

Il teorema dato sopra ci assicura che i vettori sono linearmente indipendenti se e solo se le colonne della matrice A sono linearmente indipendenti. Inoltre, se ciò non avviene, estrarre dai vettori il massimo numero di vettori linearmente indipendenti corrisponde ad estrarre dalla matrice A il massimo numero di colonne linearmente indipendenti.

Nel corso di geometria abbiamo visto che il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A coincide con il rango della matrice A. Non solo, il calcolo del rango di A ci dice anche come possiamo estrarre il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice A.

- Se abbiamo calcolato il rango di A utilizzando i determinanti dei minori e M è un minore estratto da A con determinante non nullo e avente ordine uguale al rango di A, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti si ottiene prendendo le colonne corrispondenti alle colonne del minore M. Pertanto il massimo numero di vettori linearmente indipendenti vettori tra $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_s$ sono i vettori aventi come coordinate le colonne corrispondenti alle colonne di M.

- Se abbiamo calcolato il rango di A per mezzo dell'algoritmo di Gauss, e B è la matrice a scalini ottenuta a partire dalla matrice A, allora il massimo numero di colonne linearmente indipendenti sono le colonne le cui posizioni corrispondono agli scalini della matrice B. E quindi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti si ottengono prendendo i vettori tra $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$,..., $\mathbf{u}_s$ le cui posizioni corrispondono agli scalini di B.

Diamo qualche esempio.

Esempio 5.3 Consideriamo i vettori $f_1(x) := 1 + x - 2x^2$, $f_2(x) := x + 3x^4$, $f_3(x) := 1 - 2x^2 - 3x^4$. Vogliamo estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.
Osserviamo che i tre polinomi appartengono tutti a $\mathbb{R}^5[x]$, la cui base canonica è formata dai polinomi 1, x, x^2, x^3, x^4. Scriviamo allora la matrice le cui colonne corrispondono alle coordinate dei polinomi $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^5[x]$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Il rango di A è uguale a 2 e un minore di ordine 2 con determinante non nullo è, ad esempio, quello evidenziato:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Dunque $f_1(x)$ e $f_3(x)$ sono linearmente indipendenti e $f_1(x)$, $f_2(x)$ e $f_3(x)$ sono linearmente dipendenti. $\triangle$

Esempio 5.4 Consideriamo nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ i seguenti vettori:

$$\mathbf{v}_1 := (1, 2, 1, 0) \ , \ \mathbf{v}_2 := (2, 3, 0, 1) \quad \mathbf{v}_3 := \left(1, \frac{5}{2}, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

Vogliamo estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Consideriamo la matrice le cui colonne corrispondono alle coordinate dei vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^4$:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Applichiamo il metodo di Gauss per il calcolo del rango di A. Dopo avere svolto i passaggi necessari troviamo la matrice a scalini:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice ha allora rango 2. Dunque la matrice A ha 2 e non più di due colonne linearmente indipendenti.
Gli scalini di B sono in prima e seconda posizione. Dunque i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti e i tre vettori di partenza sono linearmente dipendenti. $\triangle$

Notiamo che affinché questo metodo possa essere utilizzato abbiamo bisogno di avere preliminarmente una base dello spazio vettoriale in cui stiamo operando.

Abbiamo quindi il seguente teorema.

Teorema 5.5 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Siano $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$ vettori di V. Sia A la matrice a n righe e r colonne avente come colonne le coordinate degli s vettori relative alla base data. Sia p il rango della matrice A. Possiamo allora scegliere tra gli r vettori al*

massimo p vettori linearmente indipendenti. Essi sono dati da quei vettori le cui coordinate servono a formare un minore invertibile di A di ordine p. Inoltre tutti gli altri vettori sono combinazione lineare dei p vettori appena scelti.
In alternativa, si riduce la matrice A in una matrice B a scalini. I vettori linearmente indipendenti sono quelli in corrispondenza dei quali vi sono gli scalini della matrice B.

5.3 Dimensione

Teorema 5.6 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Dati comunque s vettori con $s > n$, essi sono linearmente dipendenti.*

Dimostrazione Si consideri la matrice avente come colonne le coordinate degli s vettori relativamente alla base data. Il rango di tale matrice al massimo è uguale a $n < s$. Da cui segue la tesi per la proposizione precedente. ■

Teorema 5.7 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K dotato di una base formata da n elementi. Se n vettori sono linearmente indipendenti, allora essi formano una base di V.*

Dimostrazione Supponiamo, per assurdo, che tali n vettori non siano generatori di V. Allora esisterebbe un vettore di V che non sarebbe combinazione lineare degli n vettori dati. Avremmo allora trovato $n+1$ vettori linearmente indipendenti. Ciò è assurdo per il teorema precedente.

Teorema 5.8 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo K.*
Siano $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ due sue basi. Allora si ha $n = m$.

Dimostrazione Poiché $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ è una base, i suoi vettori sono linearmente indipendenti; quindi, per la proposizione precedente, si ha $m \leq n$. Scambiando tra loro i ruoli delle due basi si ottiene anche $n \leq m$. Da cui la tesi. ■

Definizione 5.9 Il teorema precedente ci assicura che, se uno spazio vettoriale ha una base con n elementi, allora ogni altra sua base ha n elementi. Tale numero n viene detto **dimensione** dello spazio vettoriale. △

Esercizio di base EB.5.2 Calcolare la dimensione dei seguenti spazi vettoriali:

1. lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ sui reali;
2. lo spazio vettoriale $V^3(O)$ sui reali;
3. lo spazio vettoriale K su un campo K;
4. lo spazio vettoriale Kn su un campo K;

5. lo spazio vettoriale $M(K, p, q)$ su un campo K;
6. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$;
7. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$;
8. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$;
9. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{R}$;
10. lo spazio vettoriale $K^n[x]$ su K;
11. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{C}$;
12. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{R}$. $\triangle$

Diamo ora un metodo per determinare una base di uno spazio vettoriale V. Se $V = \{\mathbf{0}\}$, esso non è dotato di alcuna base. Non esistono infatti in V vettori linearmente indipendenti. In questo caso diciamo che V ha dimensione uguale a 0. Sia $V \neq \{\mathbf{0}\}$. Esiste quindi in V almeno un vettore non nullo. Scegliamone uno e chiamiamolo $\mathbf{e}_1$. Se $\mathbf{e}_1$ genera V, esso è una base di V. Altrimenti esiste almeno un vettore di V che non è combinazione lineare di $\mathbf{e}_1$. Scegliamone uno e chiamiamolo $\mathbf{e}_2$. Quindi $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ sono linearmente indipendenti. Se essi generano V, abbiamo determinato una base di V. Altrimenti possiamo iterare questo procedimento. Abbiamo ora due possibilità:
1) ad un certo punto otteniamo n vettori $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ che formano una base di V;
2) il procedimento può continuare all'infinito. Esistono cioè, per ogni n intero, n vettori linearmente indipendenti.
Nel secondo caso diremo che lo spazio vettoriale ha **dimensione infinita**.

La dizione "dimensione infinita" deriva dal fatto che, ispirandoci al teorema 4.7, possiamo dare una nuova definizione di base:

Definizione 5.10 Un sottoinsieme (eventualmente composto da infiniti elementi) di uno spazio vettoriale V su un campo K si dice **base** se ogni vettore di V si può esprimere in uno ed un sol modo come combinazione lineare di un numero finito di elementi del sottoinsieme. $\triangle$

Nota 5.11 Il teorema 4.7 Nel caso in cui l'insieme sia formato da un numero finito di elementi, questa nuova definizione di base coincide con la vecchia definizione. $\triangle$

Il prossimo esempio mostra che esistono spazi vettoriali non dotati di basi finite ma dotati di basi (secondo la nuova definizione) infinite. Si può anzi dimostrare (noi non lo facciamo) che uno spazio vettoriale non formato dal solo vettore nullo è sempre dotato di una base (finita o infinita).

Esempio 5.12 Sia $R[x]$ l'insieme dei polinomi di grado qualsiasi a coefficienti reali. Tale insieme, con le usuali operazioni di addizione di polinomi e di moltiplicazione di un polinomio per un numero reale, è uno spazio vettoriale. Tale spazio non può essere dotato di una base formata da un numero finito di elementi. Si nota, infatti, che, dato un numero n di polinomi, qualsiasi combinazione lineare di essi è un polinomio di grado minore o uguale al massimo dei gradi degli n polinomi considerati. Tali polinomi non possono quindi generare tutto $R[x]$. Notiamo tuttavia che i polinomi 1 , x , x^2 , ..., x^n , ... formano una base infinita di $R[x]$. Lasciamo la dimostrazione di quest'ultima affermazione per esercizio (ricordarsi che un polinomio è per definizione la somma di un numero finito di monomi). $\triangle$

5.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.1 Dimostriamo il primo passo. Dire che $(a_1, \ldots, a_n$ sono le coordinate del vettore V_1, vuol dire che si ha

$$v_1 = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$$

Analogamente si ha

$$w_1 = b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$$

Quindi

$$v_1 + w_1 = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n + b_1e_1 + \cdots + b_ne_n$$

Sfruttando le proprietà degli spazi vettoriali si ottiene

$$v_1 + w_1 = (a_1 + b_1)e_1 + \cdots + (a_n + b_n)e_n$$

(Si consiglia di eseguire tutti i singoli passaggi evidenziando, per ogni passaggio, quale proprietà si sono sfruttate).
Dalla ultima formula segue che il vettore $v_1 + w_1$ ha effettivamente come coordinate la somma delle coordinate dei due vettori.
In modo analogo si dimostra il secondo passo.
La dimostrazione del terzo passo si ottiene sfruttando i primi due passi. E così via. (Si consiglia di fare effettivamente la dimostrazione).

Soluzione dell'esercizio di base EB.5.2

1. Lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ sui reali ha dimensione uguale a 2;
2. lo spazio vettoriale $V^3(O)$ sui reali ha dimensione uguale a 3;
3. lo spazio vettoriale $\mathbb{K}$ su un campo $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a 1;
4. lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$ su un campo $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a n;
5. lo spazio vettoriale $M(mathdsK, p, q)$ su un campo $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a $p \cdot q$;
6. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$ ha dimensione uguale a 1;
7. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$ ha dimensione uguale a 2;
8. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{C}$ ha dimensione uguale a n;
9. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n$ su $\mathbb{R}$ ha dimensione uguale a $2n$;
10. lo spazio vettoriale $\mathbb{K}^n[x]$ su $\mathbb{K}$ ha dimensione uguale a n;
11. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{C}$ ha dimensione uguale a n;
12. lo spazio vettoriale $\mathbb{C}^n[x]$ su $\mathbb{R}$ ha dimensione uguale a $2n$.

Per dimostrare tutte queste affermazioni considerare le basi canoniche dei rispettivi spazi vettoriali (vedere capitolo precedente).

5.5 Esercizi

Esercizio E.5.1 Si considerino i seguenti vettori di R^3:
$\mathbf{v}_1 := (1,0,2)$, $\mathbf{v}_2 := (2,0,4)$, $\mathbf{v}_3 := (2,1,4)$, $\mathbf{v}_4 = (1,3,2)$. Estrarre da questi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti utilizzando l'algoritmo di Gauss.

Esercizio E.5.2 Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{C}^3$:

$$\mathbf{v}_1 := (1,2,3)\ , \mathbf{v}_2 := (i,2i,3i)\ ,\ \mathbf{v}_3 := (1+i,2+2i,3+3i)$$

Estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti considerando $\mathbb{C}^3$ come spazio vettoriale prima su $\mathbb{C}$ e poi su $\mathbb{R}$.

Esercizio E.5.3 Si considerino i polinomi $p_1(x)$ e $p_2(x)$ $p_3(x)$ di $R^3[x]$ verificanti le seguenti condizioni:

$$p_1(1) = 5\ ,\ p_1(3) = 2\ ,\ p_1(-1) = 4$$

$$p_2(1) = 2\ ,\ p_2(3) = 4\ ,\ p_2(-1) = 7$$

$$p_3(1) = 12\ ,\ p_3(3) = 8\ ,\ p_3(-1) = 15$$

Estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti.

5.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.5.1 Consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate dei 4 vettori relative alla base canonica di R^3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Riduciamo la matrice A a scalini applicando l'algoritmo di Gauss. Sommando nella matrice A alla terza riga la prima riga moltiplicata per -2 otteniamo la matrice:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La prima e la terza colonna (colonne degli scalini) sono linearmente indipendenti. Poiché la matrice A' ha gli scalini nella prima e nella terza colonna, abbiamo che il primo e il terzo vettore sono linearmente indipendenti.

Soluzione dell'esercizio E.5.2 Osserviamo che in ogni caso il vettore $\mathbf{v}_3$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Ne segue che i tre vettori sono linearmente dipendenti. Consideriamo ora i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ e chiediamoci se essi sono linearmente indipendenti.

1. Se consideriamo $\mathbb{C}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, abbiamo che $\mathbf{v}_2$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1$. Segue che in questo caso possiamo estrarre dai tre vettori al massimo un vettore linearmente indipendente. Esso può essere uno qualsiasi dei tre vettori.

2. Se consideriamo $\mathbb{C}^3$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, abbiamo che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che dai tre vettori iniziali possiamo scegliere al massimo due vettori linearmente indipendenti. Essi sono due qualsiasi dei tre.

Si consiglia ora di rifare l'esercizio usando l'algoritmo dato nel secondo paragrafo.

Soluzione dell'esercizio E.5.3 Si potrebbe risolvere l'esercizio determinando esplicitamente i tre polinomi e calcolando il rango della matrice avente come colonne le coordinate dei tre polinomi relative alla base canonica di $R^3[x]$.
I calcoli però sarebbero estremamente lunghi.
Conviene invece considerare la base di Lagrange relativa a 1,3 e -1.
In tal caso si eliminano quasi tutti i calcoli. Come?

.