Capitolo 6

Sottospazi vettoriali

6.1 Introduzione

Riprendiamo un argomento già studiato ampiamente nel corso di Geometria, i sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale.
Ci limiteremo a darne la definizione, a darne qualche esempio e a ricordare alcuni teoremi. Per maggiori dettagli e per ulteriori esercizi si rimanda al testo di geometria.

6.2 Sottospazi vettoriali

Definizione 6.1 Un sottoinsieme non vuoto E di uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ si dice **sottospazio vettoriale** di V (o, più brevemente, sottospazio) se:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}+\mathbf{v} \in E &\text{ per ogni } \mathbf{u} \in E,\ \mathbf{v} \in E \\ k\mathbf{u} \in E &\text{ per ogni } k \in \mathbb{K},\ \mathbf{u} \in E. \end{aligned} \qquad \triangle$$

Se E è un sottospazio vettoriale di V, allora le operazioni di V inducono in E un'operazione di addizione di vettori e un'operazione di moltiplicazione di uno scalare per un vettore.
Ci chiediamo se E, rispetto a queste operazioni, sia uno spazio vettoriale.
Per verificare ciò dobbiamo verificare se sono valide tutte le proprietà di uno spazio vettoriale. La proprietà 1. (proprietà associativa) è verificata. Infatti, se abbiamo tre vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di E è chiaro che si ha $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$ perché ciò è vero in tutto V. Lo stesso ragionamento può applicarsi per tutte le altre proprietà escluse due proprietà che richiedono po' di attenzione: l'esistenza dell'elemento neutro rispetto all'addizione e l'esistenza dell'opposto. Sappiamo infatti che in V esiste un vettore $\mathbf{0}$ tale che $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in V$: a maggior ragione si avrà $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$ per ogni $\mathbf{u} \in E$. Non sappiamo però a priori se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene esso stesso ad E. Allo stesso modo, dato un vettore

$\mathbf{u} \in E$, dal momento che questo vettore è un vettore di V, esiste in V il vettore opposto di $\mathbf{u}$, ma non sappiamo a priori se $-\mathbf{u}$ appartiene ad E. In realtà queste due proprietà (esistenza dell'elemento neutro ed esistenza dell'opposto) sono automaticamente soddisfatte in un sottospazio vettoriale, come risulta dal seguente:

Teorema 6.2 *Se E è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale V allora $\mathbf{0} \in E$ e, per ogni vettore $\mathbf{u}$ di E, il vettore $-\mathbf{u}$ appartiene ad E. Dunque E è esso stesso uno spazio vettoriale (e ciò giustifica il nome di sottospazio).*

DIMOSTRAZIONE Vogliamo mostrare che $\mathbf{0} \in E$. Sappiamo che se k è un numero reale e se $\mathbf{v}$ è un vettore di E si ha che $k\mathbf{v}$ appartiene ad E. In particolare ciò è vero se prendiamo come scalare k il numero 0 e come vettore $\mathbf{v}$ un qualsiasi vettore di E (che è non vuoto, per definizione di sottospazio vettoriale). Dunque $0\mathbf{v} \in E$, ma $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$, cioè $\mathbf{0} \in E$.

Vogliamo ora mostrare che se $\mathbf{u}$ è un vettore di E allora $-\mathbf{u}$ appartiene anch'esso ad E. Come prima, sappiamo che $k\mathbf{u}$ appartiene ad E qualunque sia k: in particolare $(-1)\,\mathbf{u}$ appartiene ad E. Poiché $(-1)\,\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ abbiamo il nostro risultato. ■

Nella dimostrazione di questo teorema abbiamo mostrato che l'elemento neutro della addizione di E è necessariamente lo stesso elemento neutro della addizione di V. Abbiamo dunque la seguente osservazione, banale, ma molto utile:

Osservazione 6.3 Se un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V non contiene il vettore $\mathbf{0}$ allora E non è un sottospazio vettoriale di V. △

Notiamo che in generale, dato un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale V per mostrare che E è uno spazio vettoriale dobbiamo innanzitutto mostrare che E non è vuoto: invece di far ciò possiamo semplicemente verificare se il vettore $\mathbf{0}$ appartiene ad E. Se infatti $\mathbf{0}$ appartiene ad E, allora E è sicuramente non vuoto, e possiamo quindi passare a verificare le altre proprietà. Se, invece, $\mathbf{0}$ non appartiene ad E, non è detto che E sia vuoto (E potrebbe contenere dei vettori diversi dal vettore nullo): sicuramente, però possiamo affermare che E non è un sottospazio vettoriale.

Esempio 6.4 Dato un qualsiasi spazio vettoriale V il sottoinsieme $\{\mathbf{0}\}$ di V formato dal solo vettore nullo è ovviamente un sottospazio vettoriale di V. Lo spazio vettoriale V è inoltre un sottospazio vettoriale di se stesso. Questi due sottospazi vettoriali di V sono detti **sottospazi banali**. △

Esempio 6.5 Sottospazi vettoriali di $V^2(\pi, O)$.
L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 0 è il sottospazio formato dal solo vettore nullo.
Sia ora V un sottospazio vettoriale di dimensione 1. Sia $\mathbf{v} = \overrightarrow{OP}$ una sua base. Quindi $\mathbf{v}$ è un vettore non nullo. Il sottospazio V è dato dai vettori $k\mathbf{v}$ al variare di k in R. Esso è quindi dato dai vettori appartenenti alla retta passante per O e per P. Viceversa, l'insieme di tutti i vettori appartenenti ad una retta passante

per O è un sottospazio vettoriale di dimensione 1. L'unico sottospazio vettoriale di dimensione 2 è lo spazio $V^2(\pi, O)$. $\triangle$

Esempio 6.6 Sottospazi vettoriali di $V^3(O)$.
I sottospazi di dimensione 0 e 1 sono, rispettivamente, il vettore nullo e le rette passanti per O. Si lascia come esercizio la dimostrazione che i sottospazi di dimensione 2 sono i piani passanti per O. $\triangle$

Esercizio di base EB.6.1 Dato un campo $\mathbb{K}$, sia $D_{\mathbb{K}}(n)$ il sottoinsieme di $M(\mathbb{K}, n, n)$ delle matrici diagonali. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{K}, n, n)$ e determinarne la dimensione. $\triangle$

Esercizio di base EB.6.2 Dato un campo $\mathbb{K}$, sia $T^{\mathbb{K}}(n)$ il sottoinsieme di $M(\mathbb{K}, n, n)$ delle matrici triangolari superiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{K}, n, n)$ e determinarne la dimensione. $\triangle$

Esercizio di base EB.6.3 Dato un campo $\mathbb{K}$, sia $S(\mathbb{K}, n)$ il sottoinsieme di $M(\mathbb{K}, n, n)$ delle matrici simmetriche. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{K}, n, n)$ e determinarne la dimensione. $\triangle$

Teorema 6.7 *Sia dato un sistema omogeneo SO di p equazioni in q incognite a coefficienti in un campo* $\mathbb{K}$. *Si ha cioè:*

$$SO \ : \quad AX = 0$$

dove $A \in M(\mathbb{K}, p, q)$ *è la matrice dei coefficienti del sistema e* X *è la matrice a* q *righe e 1 colonna delle incognite. L'insieme* $Sol(SO)$ *delle soluzioni di* SO *è un sottospazio vettoriale di* $\mathbb{K}^q$ *avente dimensione uguale a* $q - \operatorname{rk}(A)$.

DIMOSTRAZIONE Dividiamo la dimostrazione in varie parti.

- Notiamo innanzitutto che $Sol(SO) \neq \emptyset$, infatti $\mathbb{K}^q \ni 0 \in Sol(SO)$.
- Dimostriamo ora la chiusura rispetto all'addizione. Siano Y e Y' due soluzioni di SO. Dobbiamo dimostrare che $Y + Y'$ è una soluzione del sistema. Poiché Y e Y' sono soluzioni, abbiamo $AY = AY' = 0$. Dobbiamo dimostrare che si ha $A(Y + Y') = 0$.
  Abbiamo $A(Y + Y') = AY + AY' = 0 + 0 = 0$.
- In modo analogo si dimostra la chiusura rispetto alla moltiplicazione per uno scalare. Lasciamo ciò per esercizio.

Abbiamo dimostrato che $Sol(SO)$ è un sottospazio vettoriale.
Per calcolarne la dimensione, rivedere il teorema di Rouchè-Capelli. studiato nel corso di Geometria. $\blacksquare$

Teorema 6.8 *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Dati r vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ di V, abbiamo indicato con $< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r >$ l'insieme di tutte le loro combinazioni lineari. Allora:*
1) $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ di V è un sottospazio vettoriale di V.
2) Se W è un sottospazio vettoriale contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$, allora W contiene $< \mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_r >$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Definizione 6.9 Dalla definizione di $< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r >$ segue che i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ generano $< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r >$.
Per questa ragione $< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r >$ viene detto **sottospazio vettoriale generato** dai vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ △

6.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.6.1 Dimostriamo che $D_{\mathbb{K}}(n)$ è un sottospazio vettoriale.

- La matrice nulla è ovviamente una matrice diagonale.
- La somma di due matrici diagonali è diagonale (dimostrarlo).
- La moltiplicazione di una matrice diagonale per uno scalare è una matrice diagonale.

Una base di $D_{\mathbb{K}}(n)$ è data dalle matrici $A(i,i)$ (sono le matrici avente tutti gli elementi nulli fuorchè un elemento della diagonale principale che è uguale a 1).
Ne segue che la dimensione di $D_{\mathbb{K}}(n)$ è uguale a n.

Soluzione dell'esercizio di base EB.6.2 L'insieme $T^{\mathbb{K}}(n)$ delle matrici triangolari superiori è dato dalle matrici $A = (a_{ij})$ tali che, se $i < j$, allora $a_{ij} = 0$.
Sfruttiamo questa osservazione per dimostrare che $T^{\mathbb{K}}(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{K}, n, n)$.

- La matrice nulla O appartiene ovviamente a $T^{\mathbb{K}}(n)$.
- Dimostriamo ora la chiusura di $T^{\mathbb{K}}(n)$ rispetto alla addizione. Sia $A \in T^{\mathbb{K}}(n)$ e $B \in T^{\mathbb{K}}(n)$.
  Posto quindi $A = (a_{ij})$ e $B = (B_{ij})$, per ogni $i < j$ si ha $a_{ij} = b_{ij} = 0$. Dobbiamo dimostrare che, posto, $A + B = C = (c_{ij})$, per ogni $i < j$ si ha $c_{ij} = 0$.
  Ciò deriva dal fatto che, per ogni i e j si ha $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
- In modo analogo si dimostra la chiusura di $T^{\mathbb{K}}(n)$ rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Per calcolare la dimensione di $T^{\mathbb{K}}(n)$, cerchiamone una base.
Si verifica facilmente (farlo) che le matrici $A(i,j)$ con $i \leq j$ formano una base di $T^{\mathbb{K}}(n)$.
Dobbiamo quindi contare il numero di tali matrici.
Osserviamo che ne esistono n del tipo $A(1,j)$. Sono le matrici

$$A(1,1), A(1,2), \cdots, A(1,n)$$

Le matrici del tipo $A(2, j)$ sono $n-1$. Sono le matrici

$$A(2,2), A(2,3), \cdots, A(2,n)$$

E così via fino all' unica matrice di tipo $A(n, j)$,la matrice $A(n, n)$.
Pertanto la dimensione di $T^{\mathbb{K}}(n)$ è uguale a $S = 1 + 2 + \ldots n$.
Per calcolare S osserviamo la seguente tabella:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{array}$$

Sommiamo tutti i numeri che compaiono in questa tabella.
La somma degli elementi di ognuna delle due righe è uguale a S.
La somma delle elementi di ognuna delle n colonne è evidentemente uguale a $n+1$.
Abbiamo pertanto $2S = n(n+1)$. Segue che si ha

$$\dim T^{\mathbb{K}}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.6.3 Osserviamo che $A = (a_{ij})$ è una matrice simmetrica se e solo se $a_{ij} = a_{ji}$ per ogni i e j.
La dimostrazione che $S(\mathbb{K}, n)$ è un sottospazio vettoriale è analoga a quella svolta per $T^{\mathbb{K}}(n)$.
Una base di $S(\mathbb{K}, n)$ è data dalle matrici $A(i, i)$ per $i = 1, \ldots, n$ e $B(i, j)$ per $i < j$, dove $B(i, j) = A(i, j) + A(j, i)$. Dimostrare ciò. Pertanto

$$\dim S(\mathbb{K}, n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

6.4 Esercizi

Esercizio E.6.1 Dato un campo $\mathbb{K}$, sia $T_{\mathbb{K}}(n)$ il sottoinsieme di $M(\mathbb{K}, n, n)$ delle matrici triangolari inferiori. Dimostrare che esso è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{K}, n, n)$ e determinarne la dimensione.

Esercizio E.6.2 Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano fissati in esso n elementi distinti $x_1, \ldots, x_n$ (e quindi se $\mathbb{K}$ è un campo finito con k elementi si ha $n \leq k$). Sia infine $m \geq n$. Sia:

$$V = \{p(x) \in R^m[x] \mid p(x_1) = \cdots = p(x_n) = 0\}.$$

Dimostrare che V è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^m[x]$ e determinarne la dimensione.

6.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.6.1 La dimostrazione che $T_{\mathbb{K}}(n)$ è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{K}, n, n)$ è analoga a quella vista per $T^{\mathbb{K}}(n)$.
In modo analogo al caso di $T^{\mathbb{K}}(n)$ si dimostra che si ha:

$$\dim T_{\mathbb{K}}(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soluzione dell'esercizio E.6.2 SUGGERIMENTO. Scegliere $m - n$ numeri reali $x_{n+1}, \dots, x_m$ distinti tra loro e distinti da $x_1, \dots, x_n$ e utilizzare la base di Lagrange relativa ai valori $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m$.