Capitolo 7

Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

7.1 Introduzione

Ricordiamo le definizioni di intersezione e somma di due sottospazi vettoriali. Anche in questo caso rimandiamo al testo di geometria per maggiori dettagli e per più esercizi. Daremo la dimostrazione della formula di Grassman che lega le dimensioni dei sottospazi intersezione e somma.

7.2 Intersezione e somma di sottospazi vettoriali

Teorema 7.1 *Sia E uno spazio vettoriale su un campo K e siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Allora $V \cap W$ è un sottospazio vettoriale di E.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 7.2 *Dato uno spazio vettoriale E su un campo K, siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Sia:*

$$V + W = \{v + w \mid v \in V, w \in W\}$$

Allora:
1) $V + W$ è un sottospazio vettoriale di E. Esso viene detto **sottospazio somma** *di V e W.*
2) $V \subseteq V + W \quad , \quad W \subseteq V + W$
3) Se U è un sottospazio vettoriale di E tale che $V \subseteq U$ e $W \subseteq U$, allora si ha $V + W \subseteq U$.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esempio 7.3 Si consideri lo spazio vettoriale $R^5[x]$ dei polinomi di grado minore di 5. Sia V il suo sottospazio vettoriale avente come base:

$$\{p_1(x) = 1 + x + x^2 + 3x^4 \ , \ p_2(x) = 1 + x + 2x^4\}$$

Sia W il sottospazio avente come base:

$$\{p_3(x) = 2 + 2x^4 \ , \ p_4(x) = 1 + 2x + x^2 + 4x^4\}$$

Vogliamo determinare una base per $V + W$ e una base di $V \cap W$.
Cerchiamo innanzitutto una base per $V + W$. Dimostriamo innanzitutto che $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x), p_4(x)\}$ è un insieme di generatori di $V + W$. Sia infatti $p(x) \in V + W$, allora $p(x) = q(x) + r(x)$ con $q(x) \in V$ e $r(x) \in W$. Ma $q(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$ e $r(x) = b_3p_3(x) + b_4p_4(x)$. Da cui segue immediatamente che $p(x)$ è combinazione lineare dei quattro vettori. Tali vettori sono quindi generatori di $V + W$. Per estrarre da essi una base dobbiamo estrarre da essi il massimo numero di vettori linearmente indipendenti. Per fare ciò sfruttiamo il teorema 5.5 . Consideriamo una base di $R^5[x]$, per esempio la base canonica, e consideriamo la matrice A avente come colonne le coordinate dei quattro vettori. Si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Si verifica facilmente che A ha rango uguale a 3. Si ha quindi:

$$\dim(V + W) = \text{rk}(A)$$

Il minore formato dalle prime tre righe e prime tre colonne è invertibile. I primi tre vettori formano quindi una base di $V + W$.
Vogliamo ora determinare una base di $V \cap W$. A tale scopo cerchiamo i vettori $p(x) \in V \cap W$. Si ha:

$$p(x) \in V \Longrightarrow p(x) = a_1p_1(x) + a_2p_2(x)$$

$$p(x) \in W \Longrightarrow p(x) = b_3p_3(x) + b_4p_4(x)$$

Da cui, avendo posto $a_3 = -b_3$ e $a_4 = -b_4$, si ottiene:

$$a_1p_1(x) + a_2p_2(x) + a_3p_3(x) + a_4p_4(x) = 0$$

Abbiamo quindi un'equazione vettoriale nelle incognite $a_1, \ldots, a_4$. Se si passa dall'equazione vettoriale alle equazioni con le coordinate dei vettori relative alla base canonica, si ottiene un sistema omogeneo di 5 equazioni in 4 incognite. La matrice dei coefficienti non è altro che la matrice A. L'insieme delle soluzioni ha quindi dimensione uguale a $4 - \text{rk}(A) = 1$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$a_1 = t \ , \ a_2 = t \ , \ a_3 = -\frac{1}{2}t \ , \ a_4 = -t$$

e i vettori di $V \cap W$ sono del tipo:

$$p(x) = tp_1(x) + tp_2(x) = t(2 + 2x + x^2 + 5x^4)$$

ed una sua base è data dal vettore $2 + 2x + x^2 + 5x^4$. Notiamo che si ha:

$$\dim(V \cap W) = 4 - \text{rango}(A).$$

Nota 7.4 Nell'esempio precedente abbiamo trovato una base di $V+W$ cercando un minore di ordine 3 invertibile.
Osserviamo che di minori siffatti non ve ne è più di uno. Per esempio, anche il minore formato dalle prime tre righe e dalle ultime tre colonne è invertibile. Un'altra base di $V + W$ è data quindi dagli ultimi tre vettori. △

Teorema 7.5 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo K. Siano V e W due suoi sottospazi vettoriali. Si ha la* **formula di Grassman**[1]

$$\dim V + \dim W = \dim(V + W) + \dim(V \cap W).$$

Dimostrazione La dimostrazione ricalca il procedimento utilizzato nell'esempio 7.3. Ne diamo quindi rapidi cenni, lasciando i particolari come esercizio.
Si fissa una base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ dello spazio E. Si fissa una base $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ di V e una base $\{\mathbf{w}_{p+1}, \ldots, \mathbf{w}_{p+q}\}$ di W. Si considera la matrice A avente come colonne le coordinate, relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di V, dei vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p, \mathbf{w}_{p+1}, \ldots, \mathbf{w}_{p+q}\}$. Si ha $\dim(V + W) = \text{rango}(A)$. Si determina ora una base di $V \cap W$ con il procedimento utilizzato nell'esempio 7.3. Si ha un sistema omogeneo di n equazioni in $p + q$ incognite in cui A è la matrice dei coefficienti. La dimensione di $(V \cap W)$ è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema. Essa è uguale a $p + q - \text{rango}(A)$. Da cui segue facilmente la tesi. ■

Esercizio di base EB.7.1 Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{C}^3$ su $\mathbb{C}$:

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0$$

$$W = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + iz_2 = 0$$

Determinare basi per $V + W$ e per $V \cap W$. △

Nota 7.6 Dalla definizione di $V + W$ segue che ogni vettore di V+W si scrive come $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{w} \in W$. Tale scrittura può NON essere unica. Si consideri infatti l'esempio 7.3. Dato infatti il vettore $q(x) = x + x^4$, si ha $q(x) = -p_1(x) + p_4(x)$. Considerato poi un qualsiasi vettore $p(x) \in V \cap W$, si ha:

$$q(x) = (-p_1(x) + p(x)) + (-p(x) + p_4(x))$$

[1] **Hermann Günther Grassman,** (1809,1877), matematico e indianista tedesco.

Notiamo che si ha $-p_1(x) + p(x) \in V$ e $-p(x) + p_4(x) \in W$.
Prendendo quindi, per esempio, $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, otteniamo una seconda scrittura di $q(x)$:

$$\begin{aligned} q(x) &= [-p_1(x) + p(x)] + [-p(x) + p_4(x)] = \\ &= [-p_1(x) + p_1(x) + p_2(x)] + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] = \\ &= p_2(x) + [-p_1(x) - p_2(x) + p_4(x)] \end{aligned}$$

7.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.7.1 Si determina innanzitutto una base per V e una base per W.
Si verifica facilmente che

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)\}$$

è una base di V.
Si verifica facilmente che

$$\{\mathbf{v}_3 = (1, i, 0), \mathbf{v}_4 = (0, 0, 1)\}$$

è una base di W. Sia A la matrice avente come colonne le coordinate, relative alla base canonica di $\mathbb{C}^3$, dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & i & 0 \\ 0 & -1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Si ha $\operatorname{rk}(A) = 3$ e quindi $\dim(V + W) = 3$. Pertanto $V + W = \mathbb{C}^3$ e quindi una base di $V + W$ è la base canonica di $\mathbb{C}^3$.
Dalla formula di Grassman segue $\dim(V \cap W) = 1$.
Per determinarne una base potremmo seguire il procedimento visto in 7.3. Usiamo però un altro metodo. I vettori (z_1, z_2, z_3) appartenenti a $V \cap W$ sono tutti e soli i vettori verificanti il sistema:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 & = & 0 \\ z_1 + iz_2 & = & 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli (farlo!) otteniamo le soluzioni del sistema

$$\left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)t, \left(-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)t, t\right) \mid t \in \mathbb{C}$$

Otteniamo una base di $V \cap W$ ponendo $t = 1$. Pertanto

$$\left\{\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 1\right)\right\}$$

è una base di $V \cap W$.

7.4 Esercizi

Esercizio E.7.1 In $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ considerare i sottospazi vettoriali $S(\mathbb{R}, 2)$ e $T^{\mathbb{R}}(2)$. Determinare una base di $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2)$ e una base di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Esercizio E.7.2 In $M(\mathbb{R}, n, n)$ considerare i sottospazi vettoriali $S(\mathbb{R}, n)$ e $T^{\mathbb{R}}(n)$. Determinare una base di $S(\mathbb{R}, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ e una base di $S(\mathbb{R}, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$.

Esercizio E.7.3 Sia dato uno spazio vettoriale E di dimensione 3 su un campo K. Siano V e W due suoi sottospazi vettoriali aventi ambedue dimensione uguale a 2. Cosa si può dire per la dimensione di $V + W$ e per la dimensione di $V \cap W$?

Esercizio E.7.4 Dimostrare, sfruttando la formula di Grassman, la seguente proprietà di geometria: se due piani hanno almeno un punto di intersezione, allora o essi coincidono o hanno come intersezione una retta.

Esercizio E.7.5 Dimostrare il seguente teorema. Dato uno spazio vettoriale E di dimensione finita, se V e W sono due suoi sottospazi vettoriali tali che $\dim(V + W) = \dim(W)$, allora si ha $V \subseteq W$.

7.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.7.1 Per risolvere questo esercizio si potrebbe fissare una base per ognuno dei due sottospazi e poi procedere come nell'esempio 7.3. In questo caso però vi una strada più veloce. Sappiamo infatti che si ha $\dim S(\mathbb{R}, 2) = 3$ e che esistono matrici triangolari superiori che non sono simmetriche. Ma allora $\dim(S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2) > 3$ e quindi $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2) = 4$. Ne segue che una base di $S(\mathbb{R}, 2) + T^{\mathbb{R}}(2)$ è la base canonica di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$.
Dalla formula di Grassman segue $\dim(S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)) = 2$. Per determinare una base dell'intersezione dobbiamo quindi determinare due vettori linearmente indipendenti di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.
Osserviamo che le matrici

$$A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ A(2,2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono entrambe simmetriche e triangolari superiori. Essendo linearmente indipendenti formano una base di $S(\mathbb{R}, 2) \cap T^{\mathbb{R}}(2)$.

Soluzione dell'esercizio E.7.2 Consideriamo innanzitutto $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$.
In EB.6.3 abbiamo visto che una base di $S(\mathbb{R}, n, n)$ è data dalla matrici $A(i, i)$, con $i = 1, \ldots, n$ e $B(i, j) = A(i, j) + A(j, i)$ con $i < j$.
In EB.6.2 abbiamo visto che una base di $T^{\mathbb{R}}(n)$ è data dalla matrici $A(i, j)$ con $i \leq j$.
L'insieme di tutte le matrici appartenenti a queste due basi è un insieme di generatori di $S(\mathbb{R}, n, n)$ è data dalla matrici $A(i, i)$.
Si verifica facilmente (farlo) che tutte le matrici $A(i, j)$ della base canonica di $M(\mathbb{R}, n, n)$ si ottengono come combinazioni lineari delle matrici delle due basi. Ne segue che $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ coincide con $M(\mathbb{R}, n, n)$. Una sua base è quindi data dalla base

canonica di $M(\mathbb{R}, n, n)$.
Consideriamo ora $S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$.
Osserviamo che, se $A = (a_{ij}) \in S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$ allora, per ogni $i > j$ si ha $a_{ij} = 0$ (perché $A \in T^{\mathbb{R}}(n)$).
Ma allora, poiché $A \in S(\mathbb{R}, n, n)$, si ha $a_{ij} = a_{ji}$ e quindi $a_{ji} = 0$ per $i > j$. Cambiando il nome degli indici, si ha quindi $a_{ij} = 0$ per $i < j$.
Pertanto, per ogni $i \neq j$ si ha $a_{ij} = 0$. Quindi $S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n) = D(\mathbb{R}, n)$.
Per chi si fosse perso in questa sarabanda di indici, esprimiamo a parole ciò che abbiamo appena detto.
Ogni matrice dell'intersezione, poiché appartiene a $T^{\mathbb{R}}(n)$ ha tutti gli elementi che si trovano sotto la diagonale principale uguali a 0. D'altronde anche gli elementi che si trovano sopra la diagonale principale, essendo uguali a elementi che si trovano sotto la diagonale principale, sono uguali a 0. Ne segue che tutti gli elementi che non si trovano sulla diagonale principale sono uguali a 0.
Per inciso, notiamo che, applicando la formula di Grassman, si può seguire una diversa strada per risolvere l'esercizio.
Infatti, una volta che si è visto che si ha:

$$S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n) = D(\mathbb{R}, n)$$

si può determinare la dimensione di $S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n)$ con la formula di Grassman:

$$\dim(S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = \dim S(\mathbb{R}, n, n) + \dim T^{\mathbb{R}}(n) - \dim S(\mathbb{R}, n, n) \cap T^{\mathbb{R}}(n)$$

e quindi

$$\dim(S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2$$

Pertanto

$$S(\mathbb{R}, n, n) + T^{\mathbb{R}}(n) = M(\mathbb{R}, n, n)$$

Soluzione dell'esercizio E.7.3 Osserviamo, che poiché si ha $\dim V = \dim W = 2$ e $\dim E = 3$ si ha $\dim(V + W) = 3$ oppure $\dim(V + W) = 2$.
Se $\dim(V + W) = 3$, allora $V + W = E$ e $\dim(V \cap W) = 1$. Se $\dim(V + W) = 2$, allora $V + W = V$ e $V + W = W$. Da ciò segue $V = W$ e quindi $V \cap W = V = W$.

Soluzione dell'esercizio E.7.4 Indicato con O un punto di intersezione dei due piani, consideriamo lo spazio vettoriale $V^3(O)$. I due piani sono allora sottospazi vettoriali di dimensione 2 di $V^3(O)$. Il sottospazio somma ha dimensione uguale a 2 o a 3. Dal calcolo della dimensione del sottospazio intersezione segue allora la tesi.

Soluzione dell'esercizio E.7.5 Sappiamo che, dati comunque V e W, si ha sempre $V \subseteq V + W$ e $W \subseteq V + W$.
Nel nostro caso da $\dim W = \dim(V + W)$ segue allora $W = V + W$. E quindi $V \subseteq W$.