Capitolo 11

Omomorfismi tra spazi vettoriali

Riprendiamo un argomento già ampiamente studiato nel corso di Geometria: gli omomorfismi tra spazi vettoriali.
Ci limiteremo a darne la definizione e a darne qualche esempio e a ricordare alcuni teoremi. Per maggiori dettagli e per ulteriori esercizi si rimanda al testo di Geometria.

11.1 Omomorfismi

Definizione 11.1 Dati due spazi vettoriali V e W su uno stesso campo $\mathbb{K}$, un **omomorfismo** tra V e W è una funzione $\eta : \quad V \longleftarrow W$ tale che:

$$\eta(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \eta(\mathbf{v}) + \eta(\mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{v} \in V, \forall \mathbf{w} \in W$$

$$\eta(k\mathbf{v}) = k\eta(\mathbf{v}) \ \ \forall k \in \mathbb{K}, \forall v \in V$$

In altre parole un omomorfismo tra spazi vettoriali è una funzione che conserva l'operazione di addizione tra vettori e l'operazione di moltiplicazione di un vettore per uno scalare. $\triangle$

Esercizio di base EB.11.1 Sia $\eta : M(R,p,q) \longrightarrow M(R,q,p)$ l'applicazione definita da

$$\eta(A) = {}^tA \quad \forall A \in M(R,p,q)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali. $\triangle$

Esercizio di base EB.11.2 Data $B \in M(R,p,q)$. Sia $\eta : M(R,q,r) \longrightarrow M(R,p,r)$ l'applicazione definita da $\eta(X) = BX$ per ogni $X \in M(R,q,r)$. Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali. $\triangle$

Teorema 11.2 *Sia* $\eta : E \longrightarrow F$ *un omomorfismo tra spazi vettoriali. Si ha allora:*
$\eta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$
$\eta(-\mathbf{v}) = -\eta(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in E$

DIMOSTRAZIONE Sfruttare il fatto che si ha:
$\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$ e $-\mathbf{v} = (-1)\mathbf{v}$. ■

Teorema 11.3 *Siano* $\alpha : E \longrightarrow F$ *e* $\beta : F \longrightarrow G$ *omomorfismi. Allora* $\beta \circ \alpha : E \longrightarrow G$ *è un omomorfismo.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 11.4 *L'immagine di un omomorfismo* $\eta : V \longrightarrow W$ *tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di* W*.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio.

Definizione 11.5 Dato un omomorfismo tra spazi vettoriali $\eta : V \longrightarrow W$, chiamiamo **nucleo** di η (e lo indichiamo con il simbolo $\ker \eta$), il seguente sottoinsieme di V:

$$\ker \eta = \{\mathbf{v} \in V \mid \eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$$

Teorema 11.6 *Il nucleo di un omomorfismo* $\eta : V \longrightarrow W$ *tra spazi vettoriali è un sottospazio vettoriale di* V*.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio.

Esercizio di base EB.11.3 Determinare nucleo e immagine dell'omomorfismo definito nell'esercizio EB.11.1. △

Teorema 11.7 *Un omomorfismo tra spazi vettoriali è iniettivo se e solo se il suo nucleo è formato dal solo vettore nullo.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 11.8 *Sia* $\eta : V \longrightarrow W$ *un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia* $\mathbf{v} \in V$ *e* $\mathbf{w} \in W$ *tali che* $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$*. Allora:*

$$\eta^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v} + \ker \eta$$

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 11.9 *Sia* $\eta : V \longrightarrow W$ *un omomorfismo tra spazi vettoriali e sia* $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ *una base di* V*. Allora* $\{\eta(\mathbf{v}_1), \dots, \eta(\mathbf{v}_q)\}$ *è un insieme di generatori di* $\eta(V)$*.*

DIMOSTRAZIONE . $\mathbf{w}$ un vettore dell'immagine di η. Esiste quindi un vettore $\mathbf{v} \in V$, tale che si abbia $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$. Ma $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ è una base di V; quindi, se $\mathbf{v} \in V$, si ha $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_q\mathbf{v}_q$. Ma allora, sfruttando il fatto che η è un omomorfismo, segue:

$$\mathbf{w} = \eta(\mathbf{v}) = a_1\eta(\mathbf{v}_1) + \cdots + a_q\eta(\mathbf{v}_q)$$

cioè la tesi. ■

11.2 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.11.1 Ricordare che si ha

$$^{t}(A+B) = ^{t}A + ^{t}B$$

$$^{t}(kA) = k(^{t}A)$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.11.2 Ricordare che si ha

$$B(A+A') = BA + BA'$$

$$B(kA) = kBA$$

Soluzione dell'esercizio di base EB.11.3 Si ha $\ker \eta = \{\mathbf{0}\}$ e $\eta(M(\mathbb{R}, p, q)) = M(\mathbb{R}, q, p)$.
Pertanto l'omomorfismo η è surgettivo.

11.3 Esercizi

Esercizio E.11.1 Sia $\phi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$ l'applicazione definita da

$$\phi(A) = A + ^{t}A \quad \forall A \in M(R, n, n)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Esercizio E.11.2 Sia $\psi : M(R, n, n) \longrightarrow M(R, n, n)$ l'applicazione definita da

$$\psi(A) = A - ^{t}A \quad \forall A \in M(R, n, n)$$

Dimostrare che è un omomorfismo tra spazi vettoriali.

Esercizio E.11.3 Si consideri l'omomorfismo tra spazi vettoriali:

$$f \ : \ R^2 \longrightarrow R^2$$

definito da:

$$f[(x, y)] = (x, x)$$

Determinare nucleo e immagine di f.

11.4 Soluzioni esercizi

Soluzione dell'esercizio E.11.1 Ricordare che si ha

$$^{t}(A+B) = ^{t}A + ^{t}B$$

$$^{t}(kA) = k(^{t}A)$$

Soluzione dell'esercizio E.11.2 Analoga a quella dell'esercizio precedente.

Soluzione dell'esercizio E.11.3 $\ker f = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ e $f(\mathbb{R}^2) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.