Capitolo 12

Omomorfismi e matrici

12.1 Introduzione

Nel corso di Geometria è stato visto come associare una matrice ad un omomorfismo tra spazi vettoriali.
Rimandiamo al testo del corso per esempi e esercizi su ciò.
Il simbolismo compatto introdotto nel capitolo 9 ci permette di scrivere in altro modo formule già introdotte nel corso di geometria.
L'analisi della matrice associata ad un omomorfismo ci permette di avere informazioni sulle dimensioni del nucleo e dell'immagine di un omomorfismo.
Vediamo poi come varia la matrice associata ad un omomorfismo tra due spazi vettoriali al variare delle basi scelte nei due spazi vettoriali.
Vediamo infine la matrici associata alla composizione di omomorfismi.

12.2 Omomorfismi e matrici

Teorema 12.1 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali. Sia $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E. Per ogni vettore*

$$\mathbf{v} = b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_q\mathbf{e}_q \quad \text{di } E$$

si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = b_1\eta(\mathbf{e}_1) + \cdots + b_q\eta(\mathbf{e}_q)$$

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Nota 12.2 La formula precedente con simbolismo compatto introdotto diventa:

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta\left[(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_q)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}\right] = (\eta(\mathbf{e}_1) \dots \eta(\mathbf{e}_q))\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Osserviamo la formula precedente. Essa ci dice che, per determinare l'immagine attraverso η di un qualsiasi vettore $\mathbf{v}$ basta conoscere le sue coordinate $(b_1, \ldots, b_q)$ relative alla base $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e le immagini dei vettori di tale base. Abbiamo pertanto il seguente :

Teorema 12.3 *Siano E e F due spazi vettoriali su un campo K. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E. Siano $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_q\}$ vettori qualsiasi di F. Allora esiste ed è unico un omomorfismo $\eta : E \longrightarrow F$ tale che si abbia:*

$$\eta(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i \qquad\qquad i = 1, \ldots, q$$

Esempio 12.4 Consideriamo lo spazio vettoriale R^2 e sia $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonica di R^2. Sia W uno spazio vettoriale su R. Siano $\mathbf{f}_1$ e $\mathbf{f}_2$ due vettori di W. L'unico omomorfismo $\eta : R^2 \longrightarrow W$ tale che:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \mathbf{f}_1 \quad , \quad \eta(\mathbf{e}_2) = \mathbf{f}_2$$

è dato da:

$$\eta[(a, b)] = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Infatti, poiché η deve essere un omomorfismo, si deve avere:

$$\eta[(a, b)] = \eta(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a\eta(\mathbf{e}_1) + b\eta(\mathbf{e}_2) = a\mathbf{f}_1 + b\mathbf{f}_2$$

Definizione 12.5 Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo K. Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente. Definiamo **matrice associata ad η relativamente alle basi scelte** la matrice $A = (a_{ij}) \in M(K, p, q)$ avente come j-esima colonna le coordinate del vettore $\eta(\mathbf{e}_j)$ relative alla base $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$. Cioè:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{pj}\mathbf{f}_p \qquad\qquad j = 1, \ldots, q$$

Usando il simbolismo compatto, si ha quindi:

$$(\eta(\mathbf{e}_1) \ldots \eta(\mathbf{e}_q)) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A$$

Esempio 12.6 Si consideri l'omomorfismo $\eta : R^3 \longrightarrow R^2$ definito da $\eta[(x, y, z)] = (z, y)$.
Cerchiamo la matrice associata all'omomorfismo relativamente alle basi canoniche $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ di R^3 e R^2 rispettivamente. Si ha:

$$\eta(\mathbf{e}_1) = \eta[(1, 0, 0)] = (0, 0) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_2) = \eta[(0, 1, 0)] = (0, 1) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2$$

$$\eta(\mathbf{e}_3) = \eta[(0, 0, 1)] = (1, 0) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2$$

La matrice associata a η relativamente alle basi canoniche è quindi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.12.1 Sia $\eta : M(R,2,2) \longrightarrow R^2$ definito da:

$$\eta\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = (a+d, b+c)$$

i) Dimostrare che η è un omomorfismo tra spazi vettoriali su R.
ii) Determinare la matrice A associata ad η relativamente alle basi canoniche.

Esercizio E.12.2 Sia $\beta : R^2 \longrightarrow C$ definito da:

$$\beta[(x,y)] = x + (x+y)i$$

i) Dimostrare che β è un omomorfismo tra spazi vettoriali su R.
ii) Determinare la matrice B associata a β relativamente alle basi canoniche.

Teorema 12.7 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su un campo K. Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente e sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Allora, si ha:*

$$\eta(\mathbf{v}) = \eta(b_1\mathbf{e}_1 + \cdots + b_q\mathbf{e}_q) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Dimostrazione Lasciata per esercizio. Basta applicare le formule viste in precedenza. ∎

Nota 12.8 Usando il simbolismo compatto la formula precedente diventa:

$$\eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}\right] = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Definizione 12.9 Siano E e F spazi vettoriali su un campo K. Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ una base di E e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ una base di F.
Sia $A \in M(K,p,q)$. Si definisce **omomorfismo associato ad A relativamente alle basi** $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ l'omomorfismo definito da:

$$\eta(\mathbf{e}_j) = a_{1j}\mathbf{f}_1 + \cdots + a_{pj}\mathbf{f}_p \qquad j = 1, \ldots, q$$

Esempio 12.10 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'omomorfismo $\eta' : R^3 \longrightarrow R^2$ associato ad A relativamente alle basi canoniche dei due spazi è tale che:

$$\eta'(\mathbf{e}_1) = 0\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{0}\ ,\ \eta'(\mathbf{e}_2) = 0\mathbf{f}_1 + 1\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_2\ ,\ \eta'(\mathbf{e}_3) = 1\mathbf{f}_1 + 0\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_1$$

Quindi:

$$\eta'[(x, y, z)] = x\eta'(\mathbf{e}_1) + y\eta'(\mathbf{e}_2) + z\eta'(\mathbf{e}_3) = x\mathbf{0} + y\mathbf{f}_2 + z\mathbf{f}_1 = (z, y)$$

Notiamo che l'omomorfismo η' coincide con l'omomorfismo η visto nell'esempio 12.6. △

Teorema 12.11 *Sia* $\eta : E \longrightarrow F$ *un omomorfismo tra spazi vettoriali su* K *aventi come basi rispettivamente* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ *e* $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$. *Sia* A *la matrice associata ad* η *relativamente alle basi scelte. Allora:*
1) dim $\eta(E) = \text{rk}(A)$
2) dim Ker $\eta = \dim\ E - \text{rk}(A)$
da cui:
3) dim $E = \dim\ \text{Ker}\ \eta + \dim\ \eta(E)$

Dimostrazione 1) Sappiamo che $\{\eta(\mathbf{e}_1), \ldots, \eta(\mathbf{e}_q)\}$ è un insieme di generatori di $\eta(E)$. Per estrarre da questi una base, consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate di tali vettori relative alla base scelta in F. Tale matrice è proprio la matrice A. Dal teorema 5.5 del capitolo 5 segue la tesi.
2) Cerchiamo i vettori $\mathbf{v} \in E$ tali che $\eta(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$. Sia:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\eta(\mathbf{v}) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Da cui:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Abbiamo un sistema omogeneo di p equazioni in q incognite. Lo spazio vettoriale delle soluzioni ha dimensione uguale a $q -$ rango A. Da cui la tesi. ■

Nota 12.12 La dimostrazione appena data dà un modo concreto per determinare una base per il nucleo di η e una base per l'immagine di η. △

Esercizio E.12.3 Considerare l'omomorfismo dato in E.12.1. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Esercizio E.12.4 Considerare l'omomorfismo dato in E.12.2. Determinare una base per il nucleo e una base per l'immagine.

Corollario 12.13 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi basi finite.*
Allora dim $\eta(E) \leq$ dim E.

Dimostrazione Applicare la parte 3) del teorema 12.11 ∎

Corollario 12.14 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K aventi basi finite.*
Sia E' un sottospazio vettoriale di E. Allora dim $\eta(E') \leq$ dim E'.

Dimostrazione Applicare il corollario precedente alla funzione $f|_{E'}$. ∎

12.3 Cambio di base

Teorema 12.15 *. Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e di F rispettivamente e sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. Quindi:*

$$\eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}\right] = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Siano $\{\mathbf{e'}_1, \ldots, \mathbf{e'}_q\}$ e $\{\mathbf{f'}_1, \ldots, \mathbf{f'}_p\}$ altre basi di E e di F rispettivamente e sia A' la matrice associata ad η relativamente ad esse. Quindi:

$$\eta\left[(\mathbf{e'}_1 \ldots \mathbf{e'}_q)\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}\right] = (\mathbf{f'}_1 \ldots \mathbf{f'}_p)A'\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}$$

Sia:

$$(\mathbf{e'}_1 \ldots \mathbf{e'}_q) = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)M$$

Sia:

$$(\mathbf{f'}_1 \ldots \mathbf{f'}_p) = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)N$$

Si ha allora:

$$A' = N^{-1}AM$$

Dimostrazione Si ha:

$$\eta\left[(\mathbf{e'}_1 \ldots \mathbf{e'}_q)\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}\right] = \eta\left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q)M\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}\right] =$$

$$= (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p)AM\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix} = (\mathbf{f'}_1 \ldots \mathbf{f'}_p)N^{-1}AM\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_q \end{pmatrix}$$

Da cui la tesi. ∎

Esercizio E.12.5 Sia $L \; : \; S(R,2) \; \longrightarrow \; R^2[x]$ definito da:

$$L(B) = \text{tr } B + (\text{tr}' \; B)x$$

dove:
tr B=somma degli elementi della diagonale principale di B,
tr'B=somma degli elementi della diagonale secondaria di B.
(Ricordiamo che $S(R,2)$ è lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche di ordine 2 a coefficienti reali).
1) Dimostrare che L è un omomorfismo.
2) Dimostrare che:

$$\left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\; A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $S(R,2)$.
Questa base viene detta **base canonica** di $S(R,2)$.
3) Determinare la matrice A associata a L relativamente alla base canonica di $S(R,2)$ e alla base canonica di $R^2[x]$.
4) Dimostrare che:

$$\left\{ B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \;\; B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è una base di $S(R,2)$.
5) Dimostrare che $\{\mathbf{f}_1 = 1 + x, \mathbf{f}_2 = 1 - x\}$ è una base di $R^2[x]$.
6) Determinare la matrice A' associata a L relativamente alle basi date in 4) e 5).
Si suggerisce di rispondere alla domanda 6) in due modi:
a) determinando direttamente la matrice A';
b) determinando la matrice A' utilizzando la matrice A e il teorema 12.15.

12.4 Composizione di omomorfismi

Teorema 12.16 *Siano E, F, G spazi vettoriali su un campo K aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$, $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$, $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r\}$.
Sia $\alpha \; : E \; \longrightarrow \; F$ un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ la matrice A.
Sia $\beta \; : F \; \longrightarrow \; G$ un omomorfismo avente come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ e $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r\}$ la matrice B. Allora l'omomorfismo $\beta \circ \alpha$ ha come matrice associata relativamente alle basi $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r\}$ la matrice BA.*

Dimostrazione Poiché A è la matrice associata ad α si ha:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_q) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{f}_1 \ldots \mathbf{f}_p) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_q \end{pmatrix}$$

Poichè B è la matrice associata a β, si ha:

$$\beta\left[(\mathbf{f}_1\dots\mathbf{f}_p)\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_p\end{pmatrix}\right]=(\mathbf{g}_1\dots\mathbf{g}_r)B\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_p\end{pmatrix}$$

Ma allora:

$$(\beta\circ\alpha)\left[(\mathbf{e}_1\dots\mathbf{e}_q)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}\right]=\beta\left[\alpha\left[(\mathbf{e}_1\dots\mathbf{e}_q)\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}\right]\right]=$$

$$=\beta\left[(\mathbf{f}_1\dots\mathbf{f}_p)A\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}\right]=(\mathbf{g}_1\dots\mathbf{g}_r)BA\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_q\end{pmatrix}$$

Da cui la tesi. ■

Esercizio E.12.6 Sia $L'\ :\ M(R,2,2)\ \longrightarrow\ S(R,2)$ definito da:

$$L'(B)=B+^tB$$

1) Dimostrare che L' è un omomorfismo.
2) Determinare la matrice associata a L' relativamente alle basi canoniche.
3) Dato l'omomorfismo L definito nell'esercizio E.12.5, determinare la matrice associata a $L\circ L'$ relativamente alle basi canoniche.
Si suggerisce di rispondere alla domanda 3) in due modi:
a) determinando direttamente la matrice associata;
b) determinando la matrice associata utilizzando il teorema 12.16 e le matrici associate a L e a L' relativamente alle basi canoniche che sono state calcolate in precedenza.

Esercizio E.12.7 Determinare basi per il nucleo e l'immagine degli omomorfismi $L, L', L\circ L'$ definiti negli esercizi E.12.5 e E.12.6.

Esercizio E.12.8 Sia $\gamma=\beta\circ\eta$ dove η e β sono gli omomorfismi definiti negli esercizi E.12.1 e E.12.2.
i) Determinare la matrice C associata ad γ relativamente alle basi canoniche.
ii) Determinare nucleo e immagine di γ.

Teorema 12.17 *Siano $A\in M(K,p,q)$ e $B\in M(K,r,p)$. Allora:*

$$\operatorname{rk}(BA)\le\operatorname{rk}(A)\quad,\quad\operatorname{rk}(BA)\le\operatorname{rk}(B)$$

Dimostrazione Diamo solo alcuni suggerimenti lasciando la dimostrazione completa come esercizio.
Si considerino gli omomorfismi $\alpha\ :\ K^q\longrightarrow K^p$ e $\beta\ :\ K^p\longrightarrow K^r$ associati rispettivamente alle matrici A e B relativamente alle base canoniche dei tre

spazi vettoriali.
Si ha

$$\operatorname{rk} A = \dim \alpha(K^q)\ ,\ \operatorname{rk} B = \dim \beta(K^p)\ ,\ \operatorname{rk} BA = \dim(\beta \circ \alpha)(K^q)$$

Notiamo poi che $(\beta \circ \alpha)(K^q) \subset \beta(K^q)$ e quindi $\operatorname{rk} BA \leq \operatorname{rk} B$.
Inoltre $(\beta \circ \alpha)(K^q) 0 \beta(\alpha(K^q)))$ e quindi dal teorema 12.14 segue $\operatorname{rk} BA \leq \operatorname{rk} A$.■

Esercizio E.12.9 Determinare due matrici A e B tali che:

$$\operatorname{rk}(BA) < \operatorname{rk}(A) \quad , \quad \operatorname{rk}(BA) < \operatorname{rk}(B)$$

Esercizio E.12.10 Sia $A \in M(K, m, n)$ e $B \in M(K, r, m)$ e sia $\operatorname{rk}(A) = m$. Dimostrare che allora si ha $\operatorname{rk}(BA) = \operatorname{rk}(B)$.
Suggerimento. Pensare le matrici come omomorfismi. Uno di essi è surgettivo.