Capitolo 13

Isomorfismi

13.1 Introduzione

Richiamiamo la definizione di isomorfismo tra spazi vettoriali e alcune sue proprietà. Anche questo è un argomento già introdotto nel corso di geometria. Rimandiamo quindi a quest'ultimo per ulteriori esempi e esercizi.

13.2 Isomorfimi tra spazi vettoriali

Definizione 13.1 Un **isomorfismo** tra spazi vettoriali è un omomorfismo tra spazi vettoriali che sia una corrispondenza biunivoca. Due spazi vettoriali per i quali esista un isomorfismo tra essi si dicono **isomorfi.** $\triangle$

Esercizio E.13.1 Si consideri l'applicazione $\eta : R^2[x] \longrightarrow R^2$ definita da

$$\eta(a + bx) = (a, b)$$

Dimostrare che è un isomorfismo.

Esercizio E.13.2 Dimostrare che lo spazio vettoriale $V^2(\pi, O)$ dei vettori di un piano π applicati in un suo punto O è isomorfo allo spazio vettoriale R^2.
Suggerimento. Si consideri una base di $V^2(\pi, O)$.

Esercizio E.13.3 Dimostrare che lo spazio vettoriale $V^3(O)$ dei vettori dello spazio applicati in un punto O è isomorfo allo spazio vettoriale R^3.
Suggerimento. Si consideri una base di $V^3(O)$.

Teorema 13.2 *Se due spazi vettoriali hanno la stessa dimensione allora essi sono isomorfi.*

DIMOSTRAZIONE . Siano V e W spazi vettoriali su un campo K. Supponiamo che essi abbiano dimensione uguale a n.
Sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V.

Sia $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n\}$ una base di W.
Sia:

$$f : V \longrightarrow W$$

definita da:

$$f(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1\mathbf{w}_1 + \cdots + a_n\mathbf{w}_n$$

Si verifica facilmente che f è un isomorfismo tra spazi vettoriali.

Nota 13.3 Da ciò segue che, se V è uno spazio vettoriale di dimensione uguale a n su un campo K, allora V è isomorfo a K^n. △

Il seguente teorema è l'inverso del teorema 13.2.

Teorema 13.4 *Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e se W è uno spazio vettoriale isomorfo a V, allora le dimensioni di V e W sono uguali.*

Dimostrazione Esercizio. ■

Esercizio E.13.4 Si segua la dimostrazione del teorema 13.2 per definire un isomorfismo tra $R^2[x]$ e R^2 utilizzando le basi canoniche di ambedue gli spazi. Notare che l'isomorfismo che si ottiene non è altro che l'isomorfismo assegnato nell'esercizio E.13.1.

Esercizio E.13.5 Si segua la dimostrazione del teorema 13.2 per definire un isomorfismo tra $R^2[x]$ e R^2 utilizzando per $R^2[x]$ la base di Lagrange associata ai punti 0 e 1 e per R^2 la base canonica. Notare che l'isomorfismo che si ottiene è diverso da quello ottenuto nell'esercizio precedente.

Nota 13.5 Per definire un isomorfismo tra spazi vettoriali aventi la stessa dimensione si è fatto ricorso alle basi degli spazi vettoriali. Cambiando base cambia l'isomorfismo (vedere esercizio precedente). Per questa ragione l'isomorfismo si dice **non canonico.** △

Teorema 13.6 *Sia $\eta : E \longrightarrow F$ un omomorfismo tra spazi vettoriali su K di dimensione finita aventi come basi rispettivamente $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q\}$. Sia A la matrice associata ad η relativamente alle basi scelte. L'omomorfismo η è un isomorfismo se e solo se la matrice A è invertibile.*
Inoltre, se η è un isomorfismo, la matrice associata all'isomorfismo η^{-1} relativamente alle basi date è la matrice A^{-1}.

Dimostrazione Esercizio. ■

Esercizio E.13.6 Dimostrare i seguenti teoremi:
1) $A \in M(K, p, q)$ e $B \in GL(K, p) \Longrightarrow \operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} A$
2) $A \in GL(K, q)$ e $B \in GL(K, r, q) \Longrightarrow \operatorname{rk} BA = \operatorname{rk} B$
Suggerimento. In 1) pensare A come un omomorfismo e B come un isomorfismo. In 2) viceversa.