Capitolo 14

Spazio degli omomorfismi

14.1 Introduzione

Ecco un argomento totalmente nuovo.
Abbiamo visto che ad ogni omomorfismo tra spazi vettoriali di dimensione finita possiamo associare una matrice e viceversa.
Abbiamo quindi una corrisposndenza biunivoca tra l'insieme degli omomorfismi tra due spazi vettoriali e lo spazio vettoriale delle matrici.
Intoduciamo ora una struttura di spazio vettoriale all'insieme degli omomorfismi. In tal modo abbiamo un isomorfismo tra lo spazio vettoriale degli omomorfismi e lo spazio vettoriale delle matrici.
In virtù di questo isomorfismo possiamo determinare alcune proprietà degli omomorfismi leggendole come proprietà delle matrici.

14.2 Spazio degli omomorfismi

Definizione 14.1 Siano E e F spazi vettoriali su un campo K. Sia $\text{Hom}(E, F)$ l'insieme degli omomorfismi tra lo spazio vettoriale E e lo spazio vettoriale F.
Definiamo in $\text{Hom}(E, F)$ una operazione di addizione nel seguente modo:
dati gli omomormismi $\alpha : E \longrightarrow F$ e $\beta : E \longrightarrow F$ definiamo:

$$\alpha + \beta : E \longrightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{v}) = \alpha(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che $\alpha + \beta$ è un omomorfismo.
Definiamo in $\text{Hom}(E, F)$ una operazione di moltiplicazione per uno scalare nel seguente modo:
dato l'omomormismo $\alpha : E \longrightarrow F$ e l'elemento $k \in K$, definiamo:

$$k\alpha : E \longrightarrow F$$

nel seguente modo:

$$(k\alpha)(\mathbf{v}) = k\alpha(\mathbf{v})$$

Si verifica (esercizio) che $k\alpha$ è un omomorfismo. △

Teorema 14.2 *L'insieme* $\mathrm{Hom}(E, F)$ *con le operazioni di cui sopra è uno spazio vettoriale.*

DIMOSTRAZIONE Non diamo tutta la dimostrazione.
Ci limitiamo a a far notare che il vettore nullo di $\mathrm{Hom}(E, F)$ è l'omomorfismo che associa ad ogni vettore $\mathbf{v}$ di E, il vettore nullo di F. Questo omomorfismo viene ovviamente chiamato **omomorfismo nullo.**.
Dato poi $\eta \in \mathrm{Hom}(E, F)$, il suo opposto è l'omomorfismo $(-1)\eta$.
La dimostrazione di queste due proprietà viene lasciata per esercizio.
La dimostrazione delle altre proprietà di uno spazio vettoriale non è particolarmente istruttiva e quindi viene omessa (leggi: non fa parte del programma del corso). ■

Teorema 14.3 *Siano E e F spazi vettoriali su un campo K.*
Siano $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_p\}$ basi di E e F rispettivamente.
Si consideri l'applicazione:

$$\psi \; : \; \mathrm{Hom}(E, F) \longrightarrow M(K, p, q)$$

che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.
Allora:
- l'applicazione ψ è un isomorfismo tra spazi vettoriali;
- l'isomorfismo inverso di ψ è l'applicazione che associa ad ogni matrice l'omomorfismo associato ad essa relativamente alle basi date.
Da tutto ció segue inoltre:

$$\dim \mathrm{Hom}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

DIMOSTRAZIONE Una volta che si è ben compreso come si associa una matrice ad un omomorfismo, la dimostrazione è molto più semplice di quanto si possa pensare a prima vista. Viene pertanto lasciata per esercizio. ■

Nota 14.4 L'isomorfismo appena definito dipende dalla scelta delle basi. In altre parole, se si cambiano le basi, cambia l'isomorfismo. Per questa ragione l'isomorfismo viene detto **non canonico.** △

Esercizio di base EB.14.1 Consideriamo in R^3 lo spazio vettoriale π formato dai vettori (x, y, z) tali che $x + y + z = 0$.
1) Dimostrare che l'insieme H' degli omomorfismi $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$ tali che $\pi \subseteq \ker \eta$ è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(R^3, R^4)$.
2) Determinare la dimensione di W. △

14.3 Esercizi

Esercizio E.14.1 Siano E e F spazi vettoriali sun un campo K. Sia F' un sottospazio vettoriale di F. Sia H'' il sottoinsieme di $\mathrm{Hom}(E, F)$ formato da tutti gli omomorfismi aventi l'immagine contenuta in F'.
Dimostrare che H'' è un sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(E, F)$.

Esercizio E.14.2 Sia F' il sottospazio vettoriale di R^4 così definito:

$$F' = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

Sia H'' il sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(R^3, r^4)$ formato da tutti gli omomorfismi aventi l'immagine contenuta in F'.
Determinare la dimensione di H''.

Esercizio E.14.3 Sia π il sottospazio vettoriale di R^3 definito in EB.14.1.
Sia F' il sottospazio vettoriale di R^4 definito in E.14.2. Sia H''' il sottospazio vettoriale di $\mathrm{Hom}(R^3, r^4)$ formato da tutti gli omomorfismi il cui nucleo contiene π e aventi l'immagine contenuta in F'.
Determinare la dimensione di H'''.

14.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.14.1 1)Ovviamente l'omomorfismo nullo appartiene a H'.
Dimostriamo ora che H' è chiuso rispetto all'addizione. Siano η e β elementi di H'. Quindi:

$$\eta(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{v} \in \pi$$

Dobbiamo dimostrare che si ha $\eta + \beta \in W$.
Per ogni $\mathbf{v} \in \pi$, si ha:

$$(\eta + \beta)(\mathbf{v}) = \eta(\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{v}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Dimostriamo ora che H' è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.
Dobbiamo cioè dimostrare che , per ogni $k \in R$, si ha $k\eta \in H'$. Si ha:

$$(k\eta)(\mathbf{v}) = k(\eta(\mathbf{v})) = k\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

Abbiamo dimostrato che H' è un sottospazio vettoriale.
2) Dobbiamo ora determinare la dimensione di H'. Per far ciò, ci è utile vedere come è fatto un omomorfismo di H'.
Sappiamo che, per definire un omomorfismo $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$, è sufficiente definire le immagini dei vettori di una base di R^3. Poichè noi vogliamo che si abbia $\pi \subseteq \ker \eta$ ci conviene scegliere una base di R^3 che abbia due vettori in π.
Consideriamo pertanto una base di π.

Sia $\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1)\}$ una base di π. Completiamo tale base aggiungendo ad essa un vettore linearmente indipendente. Sia, per esempio:

$$\{\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 1, -1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)\}$$

una base di R^3.
Un omomorfismo $\eta : R^3 \longrightarrow R^4$ appartiene a H' se e solo se:

$$\eta(\mathbf{v}_1) = \eta(\mathbf{v}_2) = \mathbf{0}$$

Notiamo inoltre che non abbiamo alcuna condizione su $\eta(\mathbf{v}_3)$.
La matrice associata ad un omomorfismo $\eta \in H'$ relativamente alla base di R^3 di cui sopra e alla base canonica di R^4 è del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora l'isomorfismo

$$\psi \ : \ \mathrm{Hom}(R^3, R^4) \longrightarrow M(R, 4, 3)$$

definito in 14.3 che associa ad ogni omomorfismo la matrice ad esso associata relativamente alle basi date.
L'immagine attraverso ψ di H' è dato sottospazio M' di $M(R, 4, 3)$ formato dalle matrici di cui sopra.
Per determinare quindi la dimensione di H' basta determinare la dimensione di M'.
Si verifica facilmente che M' ha dimensione uguale a 4. Quindi $\dim H' = 4$.

14.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.14.1 L'omomorfismo nullo ovviamente appartiene a H''.
La chiusura di H'' rispetto all'addizione si dimostra facilmente sfruttando il fatto che F' è un sottospazio vettoriale di F e che quindi è chiuso rispetto all'addizione.
Altrettanto facilmente si dimostra la chiusura di H'' rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Soluzione dell'esercizio E.14.2 Per determinare la dimensione di H'' ci si comporta essenzialmente come nell'esercizio EB.14.1: si passa alle matrici associate agli omomorfismi di H''.
Ovviamente conviene scegliere in R^3 e in R^4 basi opportune.
In R^3 possiamo scegliere una base qualsiasi; per esempio la base canonica.

In R^4 invece ci conviene scegliere una base contenente come primi vettori i vettori di una base di F'.
Si dimostra facilmente che F' ha dimensione uguale a 2.
Prendiamo quindi una base di R^4 formata da due vettori formanti una base di F e da altri due vettori.
Le matrici associate agli omomorfismi di H'' relativamente alla base canonica di R^3 e alla base scelta di R^4 sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando come in EB.14.1 si dimostra che H'' ha dimensione uguale a 6.

Soluzione dell'esercizio E.14.3 Si scelga in R^3 una base opportuna ispirandosi al procedimento usato in EB.14.1.
Si scelga in R^4 una base opportuna ispirandosi al procedimento usato in E.14.2.
Le matrici associate agli omomorfismi di H''' relativamente a tali basi sono del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ragionando come in EB.14.1 si dimostra che H'' ha dimensione uguale a 2.