Capitolo 15

Endomorfismi tra spazi vettoriali

15.1 Introduzione

Studiamo ora un caso particolare di omomorfismi: gli omomorfismi di uno spazio vettoriale in se stesso.
Questo argomento è stato studiato in parte nel corso di geometria 2. Nel primo paragrafo riprendiamo brevemente argomenti già noti. Rimandiamo quindi ai testi del corso di geometria per esempi ed esercizi.
Nel secondo paragrafo trattiamo invece un argomento poco trattato nel corso di geometria: le matrici simili.

15.2 Endomorfismi

Definizione 15.1 Dato uno spazio vettoriale E su un campo K, un **endomorfismo di** E è un omomorfismo di E in E. △

Nota 15.2 Gli endomorfismi sono quindi particolari omomorfismi. Valgono quindi per essi i teoremi visti per gli omomorfismi. In particolare, fissata una base di E, possiamo associare ad ogni endomorfismo di E una matrice quadrata. △

Teorema 15.3 *Sia $\alpha : E \longrightarrow E$ un endomorfismo dello spazio vettoriale E su un campo K.*
Sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di E e sia A la matrice associata a α relativamente a tale base.
Si ha allora:

$$\alpha \left[(\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right] = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n) A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

DIMOSTRAZIONE È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. ■

Teorema 15.4 *Sia* $\alpha : E \longrightarrow E$ *un endomorfismo dello spazio vettoriale* E *su un campo* K. *Sia* $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *una base di* E *e sia* A *la matrice associata ad* α *relativamente ad essa.*
Sia $\{\mathbf{e'}_1, \ldots, \mathbf{e'}_n\}$ *un'altra base di* E *e sia* A' *la matrice associata ad* α *relativamente ad essa. Sia:*

$$(\mathbf{e'}_1 \ldots \mathbf{e'}_n) = (\mathbf{e}_1 \ldots \mathbf{e}_n)M$$

Si ha allora:

$$A' = M^{-1}AM$$

DIMOSTRAZIONE . È un caso particolare dell'analogo teorema visto nel caso degli omomorfismi. ■

15.3 Matrici simili

Definizione 15.5 Due matrici $A \in M(K, n, n)$ e $B \in M(K, n, n)$ si dicono *simili* (in simboli $A \sim B$) se

$$\exists M \in GL(K, n) \mid B = M^{-1}AM$$

Teorema 15.6 *La relazione di similitudine* $\sim$ *in* $M(K, n, n)$ *è una relazione di equivalenza.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Dal teorema 15.4 segue:

Teorema 15.7 *Due matrici sono simili se e solo se sono matrici associate ad uno stesso endomorfismo relativamente a basi eventualmente differenti.*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Da ciò segue:

Teorema 15.8 *Matrici simili hanno stesso rango.*

DIMOSTRAZIONE Esercizio. ■

Teorema 15.9 *Se la matrice* A *è simile alla matrice* B, *allora, per ogni* $n \in N$, *la matrice* A^n *è simile alla matrice* B^n.

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Esercizio di base EB.15.1 Le seguenti due matrici sono simili?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

15.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.15.1 Si verifica facilmente che entrambe le matrici hanno rango uguale a 2. Ma ciò non ci garantisce che A e B siano simili.
Notiamo però che si ha $A^2 = 0$ e $B^2 \neq 0$ e quindi le matrici A^2 e B^2 non sono simili.
Da cui segue che le matrici A e B non sono simili.

15.5 Esercizi

Esercizio E.15.1 Dimostrare che matrici simili hanno lo stesso determinante.

Esercizio E.15.2 La proprietà precedente è invertibile?
In altre parole: matrici aventi lo stesso determinante sono simili?

Esercizio E.15.3 Dimostrare il seguente teorema.
Fissato $k \in K$, l'unica matrice simile alla matrice kI, dove I è la matrice identica, è la matrice kI stessa.

Esercizio E.15.4 Matrici aventi lo stesso rango sono simili?

Esercizio E.15.5 Dimostrare il seguente teorema.
Se A e B sono sono simili e A è invertibile allora anche B è invertibile. Inoltre A^{-1} è simile a B^{-1}.

Esercizio E.15.6 Dimostrare che le seguenti due matrici sono simili nel campo dei reali:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Suggerimento. Sia $f : R^2 \longrightarrow R^2$ l'endomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Se A è simile a B vuol dire che è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di R^2 tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B. Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

15.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.15.1 Se $A \sim B$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $A = M^{-1}BM$.
Per dimostrare quel che vogliamo si usa allora il teorema di Binet ricordando che si ha $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ (dimostrare quest'ultima formula).

Soluzione dell'esercizio E.15.2 La risposta è no. Ecco un controesempio.
Le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno entrambe determinante nullo. Esse però non sono simili perché hanno rango differente.

Soluzione dell'esercizio E.15.3 Se $A \sim kI$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $A = M^{-1}kIM$.
Ma allora si ha $A = M^{-1}kIM = kM^{-1}IM = kM^{-1}M = kI$.

Soluzione dell'esercizio E.15.4 Matrici aventi lo stesso rango non sono necessariamente simili. Controesempio. Le matrici $2I$ e $3I$ sono ovviamente invertibili. Hanno quindi lo stesso rango. Dall'esercizio precedente segue però che non sono simili.

Soluzione dell'esercizio E.15.5 Se $A \sim A'$, esiste allora una matrice M invertibile tale che $M^{-1}AM = A'$.
Inoltre, se A è invertibile, si ha $\det A \neq 0$. Applicando quindi il teorema di Binet si ha ...
Dimostriamo ora che le inverse di A e A' sono simili.
Si ha:

$$A'^{-1} = (M^{-1}AM)^{-1} = MA^{-1}M^{-1}$$

e quindi ...

Soluzione dell'esercizio E.15.6 Dal suggerimento dato segue che dobbiamo determinare due vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ di R^2 che siano linearmente indipendenti e tali che:

$$f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1$$

Dobbiamo quindi determinare un vettore $\mathbf{v}_2 \in \ker\ f^2 - \ker\ f$. Osserviamo (esercizio) che da ciò segue $\mathbf{v}_1 \in \ker\ f - \{\mathbf{0}\}$.
Mostriamo inoltre che segue anche che i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.
Sia infatti $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2$. Applicando f si ottiene:
$\mathbf{0} = f(a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_2) = af(\mathbf{v}_1) + bf(\mathbf{v}_2) = b\mathbf{v}_1$ da cui segue, essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, che $b = 0$. Quindi $\mathbf{0} = a\mathbf{v}_1$; ma si ha anche $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ e quindi $a = 0$. Lasciamo al lettore la determinazione di $\mathbf{v}_2$ (a tal scopo calcolare A^2) e quindi di $\mathbf{v}_1$.