Capitolo 16

Matrici a blocchi

16.1 Introduzione

Studiamo ora un argomento non trattato nel corso si geometria: le matrici a blocchi.

16.2 Matrici a blocchi

Definizione 16.1 Sia $A \in M(K, p+q, p+q)$, $B_1 \in M(K, p, p)$ e $B_2 \in M(K, q, q)$. Diciamo che la matrice A è una matrice formata da due blocchi B_1 e B_2 (in simboli $A = bl(B_1, B_2)$, se:
1) la matrice B_1 è il minore di A formato dalle prime p righe e colonne,
2) la matrice B_2 è il minore di A formato dalle ultime q righe e colonne,
3) tutti gli elementi di A non appartenenti ai due minori B_1 e B_2 sono uguali a 0. △

Esempio 16.2 La matrice

$$A = \left(\begin{array}{|ccc|cc} \hline 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{3} & \multicolumn{1}{c|}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \multicolumn{1}{|c}{0} & \multicolumn{1}{c|}{4} \\ \cline{4-5} \end{array}\right)$$

è formata da due blocchi. Uno di ordine 3 e uno di ordine 2. △

Esercizio di base EB.16.1 Suddividere in blocchi la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definizione 16.3 La definizione di matrice a due blocchi si estende a matrici a n blocchi. Usiamo il simbolo $A = bl(B_1, B_2, \ldots, B_n)$. $\triangle$

Esempio 16.4 La seguente matrice è a tre blocchi.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota 16.5 Abbiamo suddiviso la matrice A dell'esempio precedente in tre blocchi. Notiamo che ne avremmo potuto darne anche altre suddivisoni in blocchi. Avremmo infatti potuto considerare la matrice A suddivisa in due blocchi. Il primo blocco formato dalle prime tre righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime due righe e colonne. Un'altra suddivisione di A in due blocchi è data dal primo blocco formato dalle prime due righe e colonne e il secondo blocco formato dalle ultime tre righe e colonne. $\triangle$

Definizione 16.6 Sia $\eta : E \longrightarrow E$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K. Un sottospazio V di E si dice **invariante** per η se si ha $\eta(V) \subset V$.
Pertanto, se V è un sottospazio invariante per η si può considerare la restrizione di η a V:

$$\eta|_V : V \longrightarrow V$$

Chiaramente è un endomorfismo di V. $\triangle$

Esempio 16.7 Sia data la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Si tratta di una matrice formata da due blocchi di ordine 2.
Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ di E.
Sia E_1 il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$.
Sia E_2 il sottospazio vettoriale di E avente come base $\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$.
Si osserva (esercizio) che le immagini di $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$ sono entrambe contenute in E_1. Da ciò segue (esercizio) che l'immagine di E_1 è contenuta in E_1. Pertanto il sottospazio E_1 è invariante.
In modo analogo (esercizio) si verifica che il sottospazio E_2 è invariante.
Si consideri ora l'omomorfismo $\eta|_{E_1}$ e si consideri la matrice ad esso associata relativamente alla base $\{\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}\}$ di E_1. Vi verifica facilmente (esercizio) che essa è uguale al blocco della matrice A formato dalle prime due righe e due colonne

di A.
In modo analogo (esercizio) si osserva che la matrice associata all'omomorfismo $\eta|_{E_2}$ relativamente alla base $\{\mathbf{e_3}, \mathbf{e_4}\}$ di E_2 è uguale al blocco della matrice A formato dalle ultime due righe e due colonne di A. $\triangle$

Teorema 16.8 *Sia E uno spazio vettoriale di dimensione n su un campo K. Sia*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

Sia dato poi un endomorfismo

$$\eta : E \longrightarrow E$$

tale che

$$\eta(E_i) \subset E_i \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

Sia data fissata una base di E tale che i primi n_1 vettori siano una base di E_1 i successivi n_2 vettori siano una base di E_2 ecc. Si ha allora che:
1) la matrice A associata a η relativamente alla base scelta è una matrice a p blocchi:

$$A = bl(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_p)$$

2) Il blocco B_i è la matrice associata a $\eta|_{B_i}$.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Si ha anche il viceversa:

Teorema 16.9 *Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo K. Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η è una matrice a p blocchi, allora si ha:*

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_p$$

con E_i opportuni sottospazi vettoriali di E invarianti per η

Dimostrazione Esercizio. ■

Teorema 16.10 *Sia A una matrice a blocchi:*

$$A = bl(B_1, \ldots, B_i, \ldots, B_j, \ldots B_p)$$

e sia A' la matrice ottenuta da A scambiando tra loro i blocchi B_i e B_j. Cioè:

$$A' = bl(B_1, \ldots, B_j, \ldots, B_i, \ldots B_p)$$

Allora $A \sim A'$.

Dimostrazione Lasciata per esercizio. In caso di necessità ispirarsi al seguente esempio. ■

Esempio 16.11 Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Si consideri l'endomorfismo η di uno spazio vettoriale E di dimensione 4 su R associato a A relativamente ad una base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ di E.
Si verifica facilmente che la matrice associata a η relativamente alla base $\{e_3, e_4, e_1, e_2\}$ è la matrice A'.
Si ha pertanto:

$$A' = M^{-1}AM \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

16.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.16.1 Si ha:

$$A = \left(\begin{array}{|cc|cc|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}\right)$$

16.4 Esercizi

Esercizio E.16.1 Verificare che le seguenti due matrici sono simili e determinare la matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

16.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.16.1 Ambedue le matrici sono formate da tre blocchi di ordine 1. Nella matrice B abbiamo gli stessi blocchi della matrice A ma in ordine inverso.
Si verifica pertanto facilmente (esercizio) che si ha

$$B = M^{-1}AM \;\; \text{con} \;\; M = A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$