Capitolo 17

Diagonalizzabilità di endomorfismi

17.1 Introduzione

Nei capitoli precedenti abbiamo definito gli endomorfismi su uno spazio vettoriale E.
Abbiamo visto che, dato un endomorfismo η di E, se E ha dimensione finita, fissata una sua base, possiamo considerare la matrice associata a η relativamente alla base data. Cambiando la base cambia, in generale, la matrice associata.
Nel corso di Geometria è stato affrontato il problema di determinare, quando esiste, una base di E in modo tale che la matrice associata ad η relativamente a tale base sia diagonale.
Ricordiamo brevemente alcuni argomenti.
Rimandiamo ai testi di geometria del primo anno per esempi ed esercizi.

17.2 Diagonalizzazione di endomorfismi

Definizione 17.1 Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale E di dimensione finita si dice **diagonalizzabile** se esiste una base di E tale che la matrice associata a f relativamente a tale base sia diagonale. $\triangle$

Definizione 17.2 Sia dato un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$. Un vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in E$ si dice **autovettore** con **autovalore** λ se $\eta(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Sia:

$$E(\lambda) = \{\mathbf{v} \in E \mid \eta(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$$

Quindi $E(\lambda)$ è costituito dal vettore nullo $\mathbf{0}$ e dagli autovettori con autovalore λ. Sappiamo che tale insieme è un sottospazio vettoriale di E e viene detto **autospazio di η relativo a λ**. La sua dimensione viene detta **molteplicità geometrica** di λ e viene indicata con il simbolo $mg_\eta(\lambda)$. $\triangle$

Teorema 17.3 *Un endomorfismo f di uno spazio vettoriale E è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di E formata da autovettori.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ∎

Teorema 17.4 *Dato un endomorfismo $\eta : E \longrightarrow E$ si ha che $\lambda_1 \in K$ è un autovalore se e solo se, indicata con A la matrice associata ad η relativamente ad una base fissata di E, si ha che λ_1 è radice del polinomio di grado n in λ*

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Il polinomio $p_A(\lambda)$ si dice **polinomio caratteristico della matrice** *A. Sia ora B la matrice associata a η relativamente ad un'altra base di E; allora si ha:*

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

Quindi il polinomio in questione non dipende dalla scelta della base in E. Possiamo quindi indicare tale polinomio con il simbolo $p(\lambda)$ e chiamarlo **polinomio caratteristico dell'endomorfismo** *η.*
Inoltre, se λ_1 è radice di $p(\lambda)$ con molteplicità uguale a m, si dice che l'autovalore λ_1 ha **molteplicità algebrica** *uguale a m. La molteplicità algebrica viene indicata con il simbolo $ma_\eta(\lambda)$.*
Ricordiamo che, dato un polinomio $p(x) \in K[x]$, una sua radice x_1 si dice di molteplicità m se $p(x) = (x - x_1)^m q(x)$ con $q(x) \in K[x]$ e inoltre $p(x)$ non è fattorizzato da $(x - x_1)^{m+1}$.

DIMOSTRAZIONE Vedere la dimostrazione nel testo del corso di geometria. ∎

Nota 17.5 Osserviamo che, dato un endomorfismo η con autovalore λ, si ha:

$$E(\lambda) = \ker(\eta - \lambda I)$$

Teorema 17.6 *La molteplicità geometrica di un autovalore è minore o uguale della sua molteplicità algebrica.*

DIMOSTRAZIONE La dimostrazione viene omessa e quindi non fa parte del programma del corso. ∎

Teorema 17.7 *Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E su un campo K di dimensione uguale a n. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ gli autovalori distinti e $E(\lambda_1), \ldots, E(\lambda_p)$ i relativi autospazi.*
Si ha che gli autospazi sono in somma diretta; cioè:

$$E' = E(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_p)$$

dove E' non coincide necessariamente con E.
Inoltre l'endomorfismo η è diagonalizzabile se e solo se E coincide con E' e quindi se e solo se sono verificate contemporaneamente le seguenti due condizioni:
a) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori è uguale a n (dimensione di E)
b) Per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

Dimostrazione La dimostrazione che gli autospazi sono in somma diretta viene omessa e quindi non fa parte del programma del corso.
La dimostrazione della seconda parte del teorema viene lasciata per esercizio.■

Definizione 17.8 Una matrice si dice **diagonalizzabile** se essa è simile ad una matrice diagonale.
Diagonalizzare una matrice A significa determinare, quando esiste, una matrice A' simile alla matrice A e una matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.
In altre parole, se $A \in M(K, n, n)$, si considera l'endomorfismo di K^n associato ad A relativamente alla base canonica di K^n e si determina, quando esiste, una base di K^N formata da autovettori.
Si può quindi parlare di autovalori, autovettori, autospazi di una matrice. △

Esercizio di base EB.17.1 Dimostrare che la matrice seguente è diagonalizzabile in C ma non in R:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci chiediamo come si faccia a vedere se due matrici A e B sono simili.

Abbiamo visto che due matrici sono simili se e solo se rappresentano uno stesso endomorfismo relativamente a due basi diverse. Questa osservazione ci permette di dare il seguente teorema.

Teorema 17.9 *Condizione necessaria affinchè le matrici A e B appartenenti a $M(K, n, n)$ siano simili è che A e B abbiano gli stessi autovalori con le stesse molteplicità algebriche e geometriche.*

Dimostrazione Lasciata per esercizio. ■

Nota 17.10 Se le due matrici sono diagonalizzabili la condizione di cui sopra è anche sufficiente. In questo caso infatti le due matrici sono simili ad una stessa matrice diagonale.
Se una delle matrici è diagonalizzabile e l'altra non lo è, ovviamente le due matrici non sono simili.
Nel caso in cui le due matrici non siano diagonalizzabili, la condizione di cui sopra non è a priori sufficiente. In EB.15.1 abbiamo dato l'esempio di due matrici che hanno gli stessi autovalori con le stesse molteplicità sia algebrica che geometrica (esercizio) che non sono simili. △

17.3 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.17.1 Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

esso non ha autovalori reali. Pertanto la matrice A non è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$. D'altronde $p_A(\lambda)$ ha due autovalori complessi coniugati distinti in $\mathbb{C}$. Essi sono i e $-i$.
Per diagonalizzare A in $\mathbb{C}$, si consideri l'endomorfismo η di $\mathbb{C}^2$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{C}^2$ e si determini una base per ognuno dei due autospazi.

17.4 Esercizi

Esercizio E.17.1 Diagonalizzare in $\mathbb{R}$ la matrice seguente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.17.2 Dimostrare il seguente teorema. Gli autovalori di una matrice triangolare sono gli elementi della diagonale principale della matrice.

Esercizio E.17.3 Determinare i valori dei parametri reali a, b, c per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.17.4 Determinare i valori del parametro reale h per i quali la seguente matrice è diagonalizzabile in $\mathbb{R}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio E.17.5 Diagonalizzare, se è possibile, l'endomorfismo η di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$\eta(a + bx + cx^2) = a + b + c + (2b + c)x + 3cx^2$$

Esercizio E.17.6 Diagonalizzare, se è possibile, l'endomorfismo η di $\mathbb{R}^3[x]$ definito da:

$$\eta(a + bx + cx^2) = a + b + c + (a + b + c)x + (a + b + c)x^2$$

Esercizio E.17.7 Dimostrare che le seguenti due matrici sono simili.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Determinare $S \in GL(\mathbb{R}, 2)$ tale che

$$B = S^{-1}AS$$

Suggerimento. Dimostrare innanzitutto che A e B sono simili ad una stessa matrice diagonale.

17.5 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.17.1 Si consideri l'endomorfismo η di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3$.
Si verifica facilmente che la matrice A, e quindi l'endomorfismo η, ha come autovalori 0 e 2 con molteplicità algebrica (e anche geometrica) uguali, rispettivamente a 2 e 1.
Una base di $E(0) = \ker \eta$ è data da $\{\mathbf{v}_1 = (0,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1)\}$ (esercizio).
Una base di $E(2) = \ker(\eta - 2I)$ è data da $\{\mathbf{v}_3 = (1,0,1)\}$ (esercizio).
Visto che la teoria ci dice che si ha $\mathbb{R}^3 = E(0) \oplus E(2)$, consideriamo la base di autovettori $\{\mathbf{v}_1 = (0,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,0,-1), \mathbf{v}_3 = (1,0,1)\}$ di $\mathbb{R}^3$. La matrice associata a η relativamente ad essa è:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi:

$$A' = M^{-1}AM$$

con:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione dell'esercizio E.17.2 Supponiamo che la matrice A sia triangolare superiore.
Si calcoli il determinante della matrice $A = (a_{ij})$ sviluppandolo secondo la prima colonna. Si ottiene:

$$p_a(\lambda) = (a_{11} - \lambda)\det(B - \lambda I)$$

dove B è il minore di A ottenuto cancellando la prima riga e la prima colonna di A.
Anche B è una matrice triangolare superiore. Si sviluppi di nuovo il suo determinante secondo la prima colonna. E così via.
Come ci si comporta se A è una matrice triangolare inferiore?

Soluzione dell'esercizio E.17.3 Gli autovalori della matrice sono 1, 2 e 3 (perché?).
Sono pertanto tutti distinti. Ognuno dei autospazi ha quindi dimensione uguale a 1 (perché?). Pertanto R^3 è la somma diretta dei tre autospazi.
La matrice A è quindi diagonalizzabile per ogni valore di a, b e c.

Soluzione dell'esercizio E.17.4 Osserviamo che gli autovalori di A sono uguali a 1 e h.
Distinguiamo ora due casi:
1) $h = 1$. Il questo caso la matrice A ha tutti gli autovalori uguali a 1 e quindi non è diagonalizzabile, altrimenti dovrebbe essere la matrice identica (perché?).
2) $h \neq 1$. In tal caso si verifica che $ma(1) = mg(1) = 2$ e $ma(h) = mg(h) = 1$ (esercizio) e quindi la matrice A è diagonalizzabile.

Soluzione dell'esercizio E.17.5 Si consideri la matrice A associata a η relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.
La matrice A è triangolare superiore e tutti gli elementi della diagonale principale sono distinti (esercizio).
Da ciò segue che la matrice A, e quindi l'endomorfismo η è diagonalizzabile.
Si lascia come esercizio la determinazione della diagonalizzata A' di A e della matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.

Soluzione dell'esercizio E.17.6 Si consideri la matrice A associata a η relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^3[x]$.
Si verifica facilmente che la matrice A, e quindi l'endomorfismo η, ha come autovalori 0 e 3 con molteplicita algebrica (e anche geometrica) uguali, rispettivamente a 2 e 1.
Da ciò segue che la matrice A, e quindi l'endomorfismo η è diagonalizzabile (perché).
Si lascia come esercizio la determinazione della diagonalizzata A di A e della matrice M tale che $A' = M^{-1}AM$.

Soluzione dell'esercizio E.17.7 Sia la matrice A che la matrice B sono triangolari superiori ed hanno sulla diagonale principale i numeri 1 e 2.
Pertanto (esercizio) entrambe sono simili alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quindi $A \sim D$, $D \sim B$. Dalla proprietà transitiva della relazione di similitudine tra matrici segue $A \sim B$.
Vogliamo ora determinare la matrice S tale che

$$B = S^{-1}AS$$

Lasciamo come esercizio la determinazione delle matrici M e N tali che:

$$D = M^{-1}AM = N^{-1}BN$$

Moltiplicando la seconda uguaglianza a sinistra per N e a destra per N^{-1} otteniamo

$$B = (NM^{-1})A(MN)^{-1} = (MN^{-1})^{-1}A(MN^{-1})$$

e quindi

$$B = S^{-1}AS \quad \text{con} \quad S = MN^{-1}$$