Capitolo 18

Matrici jordanizzabili

18.1 Introduzione

Abbiamo visto che non tutte le matrici sono simili a matrici diagonali.

Mostreremo in questo capitolo che alcune matrici sono simili a matrici di Jordan. Queste ultime sono matrici in generale non diagonali, ma "quasi diagonali".

18.2 Matrici di Jordan

Definizione 18.1 Dato un elemento λ di $\mathbb{K}$, chiamiamo **blocco di Jordan** di ordine r con autovalore λ la matrice di ordine r avente tutti gli elementi appartenenti alla diagonale principale uguali a λ, tutti gli elementi della linea subito superiore alla diagonale principale uguali a 1 e tutti gli altri elementi nulli. $\triangle$

Esempio 18.2 1) Il blocco di Jordan di ordine 1 con autovalore 5 è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}$$

2) Il blocco di Jordan di ordine 2 con autovalore 5 è la matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3) Il blocco di Jordan di ordine 3 relativo all'autovalore 5 è la matrice

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Nota 18.3 Ovviamente l'autovalore λ di un blocco di Jordan di ordine r ha molteplicità algebrica uguale a r e molteplicità geometrica uguale a 1. $\triangle$

Definizione 18.4 Una **matrice di Jordan** è una matrice a blocchi

$$A = bl(B_1, \dots, B_p)$$

i cui blocchi B_i sono blocchi di Jordan.
Una matrice A simile ad una matrice A' che sia una matrice di Jordan si dice **jordanizzabile**, la matrice A' si dice **forma canonica di Jordan** della matrice A.

Esempio 18.5 a) La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con un blocco con autovalore 1 di ordine 2 e un blocco con autovalore 3 di ordine 1.
b) La matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1 di ordine 2.
c) La matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con un blocco con autovalore 1 di ordine 2 e due blocchi con autovalore 1 di ordine 1. $\triangle$

Nota 18.6 Ogni matrice diagonale è una matrice di Jordan formata da blocchi di ordine 1; viceversa, ogni matrice di Jordan formata da blocchi di lunghezza 1 è diagonale. Da ciò segue che una matrice diagonale è in forma canonica di Jordan. Inoltre una matrice è diagonalizzabile se e solo se essa è dotata di forma canonica di Jordan i cui blocchi sono di lunghezza uguale a 1. $\triangle$

Esempio 18.7 La matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1 uno di ordine 3 e l'altro di ordine 2.
La matrice

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è una matrice di Jordan con due blocchi con autovalore 1, uno di ordine 3 e l'altro di ordine 2. Essa ha quindi gli stessi blocchi di Jordan della matrice D. Vogliamo dimostrare che la matrice E è simile alla matrice D. Si consideri l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^5$ associato alla matrice D relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5\}$. Notiamo che, per passare dalla matrice E alla matrice D, è sufficiente scambiare tra loro i due blocchi di Jordan. La matrice E quindi è la matrice associata ad f relativamente alla base di $\mathbb{R}^5$ ottenuta dalla base canonica scambiando tra loro le basi dei due spazi invarianti; in altre parole la matrice E è la matrice associata ad f relativamente alla base $\{\mathbf{e}_4, \mathbf{e}_5, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Lasciamo come esercizio la determinazione della matrice di passaggio tra le matrici D e E. △

Teorema 18.8 *Se due matrici hanno stessa forma canonica di Jordan a meno di scambi di blocchi, allora esse sono simili.*
DIMOSTRAZIONE. Esercizio. □

Ci chiediamo se ogni matrice $A \in M(\mathbb{K}, n, n)$ sia dotata di forma canonica di Jordan.
La domanda è ovviamente equivalente alla seguente domanda:
dato un endomorfismo su uno spazio vettoriale E di dimensione n su un campo $\mathbb{K}$, esiste una base di E tale che la matrice associata all'endomorfismo relativamente a essa sia di una matrice di Jordan?

Definizione 18.9 Sia η un endomorfismo di uno spazio vettoriale E. Se esiste una base di E tale che la matrice associata a η relativamente a tale base è una matrice di Jordan, l'**endomorfismo** si dice **jordanizzabile** e tale base si dice **base di Jordan**. △

Definizione 18.10 Una matrice di ordine n a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ si dice avere tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori in $\mathbb{K}$ è uguale a n. △

Teorema 18.11 *Una matrice di Jordan a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ ha tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Teorema 18.12 *Una matrice a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$ non avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ non è jordanizzabile.*

DIMOSTRAZIONE Lasciata per esercizio. ■

Ci chiediamo allora se una matrice avente tutti gli autovalori nel campo $\mathbb{K}$ sia jordanizzabile. Possiamo porci la stessa domanda per un endomorfismo avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$.

La risposta a questa domanda è positiva. Si ha infatti il seguente:

Teorema 18.13 *Ogni matrice avente tutti gli autovalori in $\mathbb{K}$ è simile ad una matrice di Jordan.*

La dimostrazione di questo teorema non è semplice e quindi la omettiamo.

18.3 Esempi di jordanizzazione

Qui ci limitiamo a mostrare alcune matrici per le quali troviamo matrici di Jordan ad esse simili.

Esempio 18.14 In effetti un esempio di tal genere lo abbiamo già visto nell'esercizio E.15.6.

In esso abbiamo dimostrato che le seguenti due matrici sono simili nel campo dei reali:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice B è una matrice di Jordan formata da un solo blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 0. Per far ciò abbiamo considerato l'endomorfismo $f : R^2 \longrightarrow R^2$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica. Abbiamo poi notato che, se A è simile a B, vuol dire che è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di R^2 tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B. Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \quad , \quad f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$$

Il vettore $\mathbf{v}_2$ appartiene quindi a $\ker f^2$ ma non appartiene a $\ker f$. Uno di tali vettori è il vettore $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$.

Infatti $f(\mathbf{e}_3) = (9, -6)$ e $f[(9, -6)] = \mathbf{0}$.

Poniamo allora $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$ e $\mathbf{v}_1 = (9, -6)$.

Osserviamo che la seguente matrice è invertibile:

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo pertanto $B = M^{-1}AM$ △

Esercizio di base EB.18.1 Mostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sono simili nel campo dei reali. △

Esempio 18.15 Vogliamo mostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è simile alla seguente matrice di Jordan formata da un solo blocco di Jordan

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo l'endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ associato alla matrice A relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Osserviamo che, se A è simile a B, allora è possibile trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ tale che la matrice associata a f relativamente ad essa sia B.

Ma allora si avrebbe:

$$f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 \quad , \quad f(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 \quad , \quad f(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$$

Indichiamo ciò con il seguente simbolismo

$$\mathbf{v}_3 \longrightarrow \mathbf{v}_2 \longrightarrow \mathbf{v}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Ne segue che dobbiamo determinare un vettore $\mathbf{v}_3 \in \ker f^3 - \ker f^2$.
Osserviamo come si comportano i vettori della base canonica di R^3 rispetto a composizioni successive di f. Abbiamo:

$$\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_2 \longrightarrow 2\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_3 \longrightarrow \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 \longrightarrow 6\mathbf{e}_1 \longrightarrow \mathbf{0}$$

Pertanto f^3 è l'endomorfismo nullo e $\ker f^3 = \mathbb{R}^3$.

Possiamo poi porre $\mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3$. Naturalmente questa non è l'unica scelta possibile.

Poniamo poi $\mathbf{v}_2 = f(\mathbf{v_3}) = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = 6\mathbf{e}_1$.

Osserviamo che $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ poiché la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile.

Abbiamo infine $B = M^{-1}AM$. $\triangle$

Teorema 18.16 *Siano A e B due matrici di ordine n su un campo $\mathbb{K}$. Sia $B = M^{-1}AM$.*
Allora per ogni $h \in \mathbb{K}$ si ha $B - hI = M^{-1}(A - hI)M$.

DIMOSTRAZIONE Viene lasciata per esercizio.
Suggerimento: vi sono due modi per dare la dimostrazione:
primo modo: pensare che due matrici sono simili se e solo se sono associate ad uno stesso endomorfismo relativamente a basi differenti
secondo modo: usare una dimostrazione analoga a quella data per dimostrare che due matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico. ■

Esercizio di base EB.18.2 Mostrare che le matrici

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sono simili nel campo dei reali e determinare M tale che $D = M^{-1}AM$. △

18.4 Soluzioni degli esercizi di base

Soluzione dell'esercizio di base EB.18.1 Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'endomorfismo associato alla matrice A relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$. Dobbiamo trovare una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che la matrice associata ad f relativamente ad essa sia la matrice B.

Dobbiamo quindi determinare $\mathbf{v}_2 \in \ker f^2 - \ker f$.

Possiamo scegliere $\mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2$. Una volta scelto $\mathbf{v}_2$, dobbiamo ovviamente fissare $e_1 = f(e_2) = 2\mathbf{e}_1$.

Osserviamo che la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile. Abbiamo infine $B = M^{-1}AM$

Soluzione dell'esercizio di base EB.18.2 Osserviamo che si ha $C = A - I$ e $D = B - I$ dove A e B sono le matrici date in EB.18.1. Abbiamo visto che le matrici A e B sono simili. Quindi per il teorema 18.16 anche le matrici C e D sono simili. Una matrice M tale che $D = M^{-1}CM$ è la matrice M tale che $B = M^{-1}AM$.

18.5 Esercizi

Esercizio E.18.1 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -4 & -6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare tutte le matrici M tali che $B = M^{-1}AM$.

Esercizio E.18.2 Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

determinare tutte le matrici M tali che $B = M^{-1}AM$.

Esercizio E.18.3 Date le matrici

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

determinare una matrice M tale $F = M^{-1}EM$.

18.6 Soluzioni degli esercizi

Soluzione dell'esercizio E.18.1 In 18.14 abbiamo determinato una matrice M. Ora le vogliamo tutte.

Per far ciò osserviamo che, per determinare M abbiamo cercato un vettore $\mathbf{v}_2$ appartenente a $\ker f^2 - \ker f$. A partire da questo vettore abbiamo poi posto $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2)$.

Per determinare tutte le matrici M dobbiamo allora cercare tutti i vettori appartenenti a $\ker f^2 - \ker f$.

Osserviamo che si ha

$$\ker f^2 = \mathbb{R}^2 \quad , \quad \ker f = \{(3t, -2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Pertanto

$$\ker f^2 - \ker f = \{(a, b) \mid b \neq -\frac{2}{3}a\}$$

Poniamo quindi:

$$\mathbf{v}_2 = (a, b) \quad , \quad \mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = (6a + 9b, -4a - 6b)$$

Consideriamo la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 6a + 9b & a \\ -4a - 6b & b \end{pmatrix}$$

Osserviamo che si ha $\det M = (2a + 3b)^2$ e quindi la matrice M è invertibile per ogni $b \neq -\frac{2}{3}a$. Da tutto ciò segue che le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 6a + 9b & a \\ -4a - 6b & b \end{pmatrix}$$

con $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ e $b \neq -\frac{2}{3}a$ sono tutte e sole le matrici per le quali si ha

$$B = M^{-1}AM$$

.

Soluzione dell'esercizio E.18.2 In EB.18.1 abbiamo determinato una matrice M.
Per determinare tutte le matrici M dobbiamo determinare tutti i vettori $\mathbf{v}_2 \in \ker f^2 - \ker f$. Osserviamo che si ha $\ker f^2 = \mathbb{R}^2$, $\ker f = \{(a, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

Quindi $\ker f^2 - \ker f = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b \neq 0\}$.

Poniamo allora $\mathbf{v}_2 = (a,b)$ con $b \neq 0$ e $\mathbf{v}_1 = f(\mathbf{v}_2) = (2b, 0)$.

Abbiamo che tutte le matrici

$$M = \begin{pmatrix} 2b & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

con a reale qualsiasi e b reale non nullo sono invertibili e che $B = M^{-1}AM$.

Soluzione dell'esercizio E.18.3 La matrice E è una matrice a blocchi, formata da un blocco di ordine 2 e un blocco di ordine 1.

La matrice F è una matrice di Jordan formata da un blocco di ordine 2 relativo all'autovalore 1 e da un blocco di ordine 1 relativo all'autovalore 2. Consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice F relativamente alla base canonica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

Possiamo decomporre $\mathbb{R}^3$ in due sottospazi invarianti per f.

Abbiamo $\mathbb{R}^3 = V \oplus W$ dove V è il sottospazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e W è il sottospazio vettoriale avente come base $\{\mathbf{e}_3\}$. La matrice associata a $f|_V$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ è la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto nell'esercizio EB.18.2 che la matrice C è simile al primo blocco, che indichiamo con D della matrice F. Abbiamo visto che si ha $D = M^{-1}CM$ con

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In altre parole la matrice D è la matrice associata a $f|_V$ relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2\}$ di V.

Passiamo ora al secondo blocco della matrice E. Esso è uguale al secondo blocco della matrice F.

Da tutto ciò segue che la matrice F è la matrice associata a f relativamente alla base $\{\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1, \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_3\}$.

Pertanto $F = N^{-1}EN$ con

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$