GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Fac simile d'esame
Soluzioni

PRIMO ESERCIZIO [7 punti]

1. Per verificare se A è simmetrica scriviamo alcuni elementi della matrice A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots \\ 2a_{11} & 2a_{21} & 2a_{31} & \dots \\ 3a_{11} & 3a_{21} & 3a_{31} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

L'osservazione della matrice ci porta a distinguere due casi:

- Primo caso: $a_{1j} = ja_{11}$ per ogni $j \geq 2$.
  In questo caso, posto per semplicità di scrittura $a_{11} = a$, abbiamo

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a & \dots \\ 2a & 4a & 6a & \dots \\ 3a & 6a & 9a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

  La matrice appare simmetrica. Per costruzione gli elementi della prima riga coincidono con quelli della prima colonna. Ma cosa succede per gli elementi delle altre righe?
  Per ogni $i \geq 2$ abbiamo:

$$a_{ij} = ia_{1j} = i \cdot ja$$

  D'altronde, poi ogni $j \geq 2$, abbiamo:

$$a_{ji} = ja_{1i} = j \cdot ia = i \cdot ja$$

  Pertanto in questo caso la matrice è simmetrica.

- Secondo caso. Se le condizioni del primo caso non sono verificate, c'è almeno un elemento della prima riga a_{1j} che non è uguale al'elemento a_{j1} della prima colonna. Pertanto la matrice A non è simmetrica.

2. Vogliamo ora calcolare il rango di A. Osserviamo che la i-sima riga di A è uguale alla prima riga di A moltiplicata per i. Pertanto sottraendo, per ogni $i \geq 2$, alla i-sima riga la prima moltiplicata per i, dopo 99 operazioni elementari di riga otteniamo una matrice A' avente lo stesso rango di A. Inoltre la matrice A' ha tutte le righe dalla seconda alla centesima uguali a 0. Pertanto abbiamo che il rango di A' (e quindi il rango di A) è uguale 1 se nella prima riga della matrice A vi è almeno un elemento non nullo. In caso contrario il rango di A è uguale a 0.

SECONDO ESERCIZIO [7 punti]

1. Sappiamo che in ogni campo è valida la legge dell'annullamento del prodotto. Pertanto, poiché $[33000]_{65537} \neq [0]_{65537}$, l'unica soluzione dell'equazione è data da $[0]_{65537}$.

2. Abbiamo ovviamente $[65530]_{65537} = -[7]_{65537}$ e quindi la nostra equazione diviene:
$$-[7]_{65537}x = [7]_{65537}$$
Moltiplicando ambo i membri per $[7]_{65537}^{-1}$ otteniamo:
$$-x = [1]_{65537}$$
da cui moltiplicando ambo i membri per $-[1]_{65537}$ otteniamo
$$x = -[1]_{65537} = [65536]_{65537}$$

TERZO ESERCIZIO [8 punti]

1. Si ha che V non è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$ perché non contiene la matrice nulla.

2. Si ha che W è un sottospazio vettoriale di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$. Infatti:

   - La matrice nulla appartiene ovviamente a W.
   - Sia $A = (a_{ij}) \in W$ (quindi $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$).
     Sia $B = (b_{ij}) \in W$ (quindi $b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 0$).
     Sia $C = (c_{ij}) = A + B$. Quindi $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
     Ma allora:
     $c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22} = a_{11} + b_{11} + a_{12} + b_{12} + a_{21} + b_{21} + a_{22} + b_{22} =$
     $= a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} + b_{11} + b_{12} + b_{21} + b_{22} = 0 + 0 = 0$. Pertanto $C \in W$.
   - Sia $A = (a_{ij}) \in W$ (quindi $a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22} = 0$).
     Sia $D = (d_{ij}) = hA$. Quindi $D_{ij} = ha_{ij}$.
     Ma allora:
     $d_{11} + d_{12} + d_{21} + d_{22} = ha_{11} + ha_{12} + ha_{21} + ha_{22} = h(a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}) = h0 = 0$. Pertanto $D \in W$.

   Vogliamo determinare una base di W. Sia $A = (a_{ij}) \in W$ (quindi $a_{11} = -a_{12} - a_{21} - a_{22}$). Pertanto
   $$W = \{A = \begin{pmatrix} -a-b-c & a \\ b & c \end{pmatrix}\}$$
   Una base di W è data quindi da:
   $$\left\{A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$
   La dimensione di W è quindi uguale a 3. Un sottospazio F supplementare di W ha quindi dimensione uguale a 1 poiché la dimensione di $M(\mathbb{R}, 2, 2)$

è uguale a 4. Determiniamo allora un supplementare F dandone una base. Per far ciò consideriamo una matrice non appartenente a W. La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

non appartiene a W.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Osserviamo che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

è triangolare superiore e quindi i suoi autovalori sono gli elementi della diagonale principale. Pertanto la matrice A ha un unico autovalore uguale a 2. Consideriamo allora la matrice $A' = A - 2I$. Abbiamo

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A' ha un unico autovalore uguale a 0.

- Per determinare una matrice B' di Jordan e una matrice M invertibile tale che $B = M^{-1}A'M$ consideriamo l'endomorfismo f di $\mathbb{R}^3$ associato alla matrice A' relativamente ad una base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.
  Volendo proprio fissare le idee, possiamo pensare che questa base sia la base canonica di $\mathbb{R}^3$, ma ciò non è assolutamente necessario.
  Osserviamo ora come si comportano i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$ rispetto a composizioni successive di f. Abbiamo:

$$\mathbf{e}_1 \longrightarrow 2\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 \longrightarrow 6\mathbf{e}_3 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_2 \longrightarrow 3\mathbf{e}_3 \longrightarrow \mathbf{0}$$

$$\mathbf{e}_3 \longrightarrow \mathbf{0}$$

  Pertanto f^3 è l'endomorfismo nullo e $\ker f^3 = \mathbb{R}^3$.
  Scegliamo ora un vettore $\mathbf{e'}_3 \in \ker f^3 - \ker f^2$. Prendiamo, per esempio $\mathbf{e'}_3 = \mathbf{e}_1$.
  Poniamo poi $\mathbf{e'}_2 = f(\mathbf{e'}_3) = f(\mathbf{e}_1) = 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$.
  Poniamo infine $\mathbf{e'}_1 = f(\mathbf{e'}_2) = 6\mathbf{e}_3$. Consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate le coordinate dei vettori $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$ relative alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Poiché M è invertibile si ha che $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ è una base.

  La matrice associata a f relativamente a tale base è

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice B' è una matrice di Jordan formata da un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 0. Abbiamo inoltre:

$$A' = M^{-1}B'M$$

e quindi

$$A = A' + 2I = M^{-1}B'M + 2I = M^{-1}B'M + 2M^{-1}IM = M^{-1}(B' + 2I)M$$

Ponendo quindi $B = B' + 2I$ abbiamo

$$A = M^{-1}BM$$

con

$$B = B' + 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che la matrice B è una matrice di Jordan formata da un solo blocco di Jordan relativo all'autovalore 2.

- Determinare, se esiste, una matrice N, diversa da M, tale che $B = N^{-1}AN$ sufficiente considerare un vettore di $\mathbf{e}''_3 \in \ker f^3 - \ker f^2$ diverso dal vettore $\mathbf{e}'_3$.
  Possiamo prendere per esempio il vettore $\mathbf{e}''_3 = 2\mathbf{e}'_3$. Prendiamo poi $\mathbf{e}''_2 = f(\mathbf{e}''_3) = 4\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$.
  Poniamo infine $\mathbf{e}''_1 = f(\mathbf{e}''_2) = 12\mathbf{e}_3$. Consideriamo la matrice avente come colonne le coordinate dei vettori $\mathbf{e}''_1, \mathbf{e}''_2, \mathbf{e}''_3$ relative alla base $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ di :
  $$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 12 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
  Procedendo come nel caso precedente otteniamo $B = N^{-1}AN$.