GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Secondo fac simile esame
Soluzione

PRIMO ESERCIZIO [8 punti] Consideriamo la prima riga della matrice A.

I suoi elementi sono del tipo a_{1j}. Segue che l'unico elemento non nullo della prima riga è l'elemento a_{1n}, cioè l'ultimo.
Analogamente l'unico elemento non nullo della seconda riga è il penultiplo. E così via.
L'ultima riga della matrice A ha come unico elemento non nullo il primo elemento. Da ciò segue che se scambiamo tra loro la prima e l'ultima riga e poi la seconda con la penultima e così via, otteniamo la matrice identica.
Pertanto la matrice A equivalente per riga alla matrice identica.
Da tutto ciò segue che si ha $\det A = (-1)^s$, dove s è il numero di scambi di riga che abbiamo fatto.
Per capire quanti scambi di riga dobbiamo fare distinguiamo due casi: n pari e n dispari.
Sia n pari. Quindi $n = 2p$. Scambiamo la prima riga con l'ultima riga ($2p + 1 - 1 = 2p$-sima), la seconda con la penultima ($2p+1-2 = 2p-1$-sima) e così via fino a scambiare la p-sima con la $2p + 1 - p = p + 1$-sima. Abbiamo fatto p scambi.
Sia ora n dispari, quindi $n = 2p + 1$. Scambiamo la prima riga con l'ultima riga ($2p+1+1-1 = 2p+1$-sima), la seconda con la penultima ($2p+1+1-2 = 2p$-sima) e così via fino a scambiare la p-sima con la $2p + 1 + 1 - p = p + 2$-sima. Lasciamo inalterata la $p + 1$-sima riga. Anche in questo caso abbiamo fatto p scambi.
Pertanto $detA = (-1)^p$.
Dobbiamo quindi distinguere se p è pari o dispari.
Quindi, se $p = 2m$ abbiamo $\det A = 1$, se $p = 2m + 1$, allora $\det A = -1$.
In definitiva abbiamo:
se $n = 4m$ oppure $n = 4m + 1$, allora $\det A = 1$,
se $n = 4m + 2$ oppure $n = 4m + 3$, allora $detA = -1$.

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

Osserviamo che si ha:
$[331]_3 = [1]_3$, $[-1502]_3 = [-2]_3 = [1]_3$, $-[32]_3 = -[2]_3 = [1]_3$
$[362]_3 = [2]_3$, $[-32]_3 = [-2]_3 = [1]_3$, $[333333]_3 = [0]_3$. e quindi il nostro sistema diviene:

$$\begin{cases} [1]_3 \quad x \quad + \quad [1]_3 \quad y \quad = \quad [1]_3 \\ [2]_3 \quad x \quad + \quad [1]_3 \quad y \quad = \quad [0]_3 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti del sistema ha determinante uguale a
$[1]_3 \cdot [1]_3 - [1]_3 \cdot [2]_3 = [2]_3 \neq [0]_3$. Dal teorema di Cramer segue che il sistema ha una sola soluzione. La determiniamo applicando l'algoritmo di Gauss.
Sottraendo alla seconda equazione la prima equazione moltiplicata per $[2]_3$ otteniamo:

$$\begin{cases} [1]_3 \quad x \quad + \quad [1]_3 \quad y \quad = \quad [1]_3 \\ [0]_3 \quad x \quad + \quad [2]_3 \quad y \quad = \quad [1]_3 \end{cases}$$

E quindi dalla seconda equazione otteniamo $y = [2]_3^{-1}$.
Abbiamo $[2]_3^{-1} = [2]_3$; infatti $[2]_3 \cdot [2]_3 = [4]_3 = [1]_3$.
Pertanto $y = [2]_3$. Sostituendo ciò nella prima equazione otteniamo:
$x + [2]_3 = [1]_3$ e quindi $x = [-1]_3 = [2]_3$. La soluzione del sistema è quindi data da $([2]_3, [2]_3)$.

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Consideriamo l'endomorfismo f associato alla matrice A relativamente alla base canonica di $\mathbb{R}^n$.
Sia V_1 il sottospazio vettoriale di R^n avente come base i primi n_1 vettori di tale base e sia V_2 il sottospazio vettoriale di R^n avente come base gli ultimi n_2 vettori di tale base. Poiché la matrice A è a blocchi, i sottospazi V_1 e V_2 sono invarianti per f e le matrici associate a $f|_{V_1}$ e a $f|_{V_2}$ rispetto alle loro basi sono le matrici A_1 e A_2.

1. Se la matrice A invertibile, allora l'endomorfismo f è un isomorfismo. In particolare $f|_{V_1}$ è un isomorfismo e quindi la matrice A_1 ad esso associata è invertibile.
   In modo analogo si dimostra che A_2 è invertibile.

2. Consideriamo l'endomorfismo f^{-1}. La matrice ad esso associata relativamente alla base canonica è la matrice A^{-1}.
   Dal momento che $f(V_1) = V_1$, si ha $f^{-1}(V_1) = V_1$.
   Analogamente $f^{-1}(V_2) = V_2$.
   Dal momento che V_1 e V_2 sono invarianti per f^{-1}, si ha che la matrice A^{-1} ad essa associata è una matrice a blocchi.
   Il primo blocco di A^{-1} è uguale alla matrice associata a $f^{-1}|_{V_1}$. Ma quest'ultima è proprio la matrice A_1^{-1}.
   In modo analogo si dimostra che il secondo blocco è la matrice A_2^{-1}.

QUARTO ESERCIZIO [6 punti] Osserviamo che le matrici A e B hanno entrambe 0 come autovalore. Entrambe hanno rango uguale a 2.
Osserviamo però che $A^2 = 0$ mentre $B^2 \neq 0$. Pertanto le matrici A^2 e B^2 non sono simili.
Ne segue che le matrici A e B non sono simili. Se infatti lo fossero, sarebbero simili anche le matrici A^2 e B^2.