

GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 27 marzo 2008

Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [7 punti] Sia $A \in M(\mathbb{R}, 50, 50)$ una matrice avente rango uguale a 20.

1. Calcolare il rango della matrice $5A$.
2. Sia $B \in M(\mathbb{R}, 100, 100)$ la matrice a blocchi avente come blocchi A e $5A$. Calcolare il rango della matrice B .

SECONDO ESERCIZIO [8 punti]

1. Siano a e b due elementi non nulli di un campo K . Dimostrare che l'elemento $a \cdot b$ è dotato di inverso e che il suo inverso è $a^{-1} \cdot b^{-1}$.
2. Sia a un elemento non nullo del campo Z_p con p numero primo. Determinare tutti i numeri primi p per i quali si ha che $a + a$ è dotato di inverso.
3. Sia a un elemento non nullo del campo Z_p con p numero primo e sia a' il suo inverso. Determinare tutti i numeri primi p per i quali si ha che $a' + a'$ è l'inverso di $a + a$.

TERZO ESERCIZIO [7 punti] Sia $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'omomorfismo associato, relativamente alle basi canoniche dei due spazi, alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Determinare una base del nucleo di f .
2. Determinare, se esiste, un sottospazio vettoriale V di \mathbb{R}^4 di dimensione 3 tale che $f(V)$ abbia dimensione uguale a 3.
3. Determinare, se esiste, un sottospazio vettoriale W di \mathbb{R}^4 di dimensione 3 tale che $f(W)$ abbia dimensione uguale a 2.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare una matrice di Jordan J e una matrice invertibile M tali che si abbia $J = M^{-1}AM$