

**GEOMETRIA E ALGEBRA**  
**LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE**  
**Prova scritta del 10 aprile 2008**

Tempo assegnato: 2 ore.

**PRIMO ESERCIZIO [7 punti]** Sia  $A = (a_{ij}) \in M(\mathbb{Z}_5, 100, 100)$  la matrice

tale che:

$$a_{1,j} = [1]_5 \forall j = 1, \dots, 100$$

$$a_{100,j} = [1]_5 \forall j = 1, \dots, 100$$

$$a_{i,1} = [1]_5 \forall i = 1, \dots, 100$$

$$a_{i,100} = [1]_5 \forall i = 1, \dots, 100$$

$$a_{i,j} = [0]_5 \text{ in tutti gli altri casi.}$$

Calcolare il rango di  $A$ .

**SECONDO ESERCIZIO [8 punti]** Si consideri il sottospazio vettoriale  $V$

di  $\mathbb{R}^4[x]$  formato da tutti i polinomi  $p(x)$  tali che  $p(\sqrt{2}) = p(\sqrt{3}) = 0$ .

1. Determinare una base di  $V$
2. Determinare, se esiste, un sottospazio vettoriale  $W$  di  $\mathbb{R}^4[x]$  tale che  $\mathbb{R}^4[x] = V \oplus W$
3. Determinare, se esiste, un endomorfismo  $f$  di  $\mathbb{R}^4[x]$  tale che:  
 $\ker f = f(\mathbb{R}^4[x]) = V$

**TERZO ESERCIZIO [7 punti]** Sia  $f : V \rightarrow W$  un omomorfismo tra spazi vettoriali sul campo  $\mathbb{Z}_{29}$  aventi entrambi dimensione uguale a 29 e sia  $V'$  un sottoinsieme non vuoto di  $V$ .

Dimostrare la verità o falsità di ognuna delle seguenti affermazioni:

1.  $V'$  sottospazio vettoriale di  $V \implies f(V')$  sottospazio vettoriale di  $W$
2.  $f(V')$  sottospazio vettoriale di  $W \implies V'$  sottospazio vettoriale di  $V$
3.  $f$  isomorfismo,  $V'$  sottospazio vettoriale di  $V \implies f(V')$  sottospazio vettoriale di  $W$
4.  $f$  isomorfismo,  $f(V')$  sottospazio vettoriale di  $W \implies V'$  sottospazio vettoriale di  $V$

**QUARTO ESERCIZIO [8 punti]** Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Determinare tutte le matrici di Jordan simili alla matrice  $A$
2. Scelta una matrice di Jordan  $J$  simile ad  $A$ , determinare tutte le matrici invertibili  $M$  tali che si abbia  $J = M^{-1}AM$