GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 9 luglio 2008
Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [7 punti] Sia A una matrice di ordine $p+q$ formata da un blocco B di ordine p e da un blocco C di ordine q.
Dimostrare la verità o falsità delle seguenti affermazioni:

1. il rango di A è uguale alla somma dei ranghi di B e C;
2. per ogni numero $k \neq 0$, il rango di kA è uguale alla somma dei ranghi di B e C.

SECONDO ESERCIZIO [7 punti] Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti nel campo $\mathbb{Z}_{19}$:

$$\begin{cases} -[5]_{19}x + [7]_{19}y + [4]_{19}z & = & [1]_{19} \\ -[5]_{19}x + [5]_{19}y + [2]_{19}z & = & [2]_{19} \\ -[9]_{19}x + [7]_{19}y + [13]_{19}z & = & [16]_{19} \end{cases}$$

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Determinare, se esiste, una matrice B di ordine 3 e rango 2 tale che la matrice BA abbia rango uguale a 1
2. Determinare, se esiste, una matrice C di ordine 3 e rango 2 tale che la matrice CA abbia rango uguale a 2
3. Determinare, se esiste, una matrice E di ordine 3 e rango 2 tale che la matrice AE abbia rango uguale a 1
4. Determinare, se esiste, una matrice F di ordine 3 e rango 2 tale che la matrice AF abbia rango uguale a 2.

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare tutte le matrici di Jordan simili alla matrice A
2. Scelta una matrice di Jordan J simile ad A, determinare una matrice invertibile M tale che si abbia $J = M^{-1}AM$