

GEOMETRIA E ALGEBRA
LAUREA SPECIALISTICA IN INGEGNERIA GESTIONALE
Prova scritta del 8 gennaio 2009

Tempo assegnato: 2 ore.

PRIMO ESERCIZIO [8 punti]

Determinare, se esistono, due matrici A e B di ordine 3 e di rango 2 tali che la matrice $A \cdot B$ abbia rango uguale a 2.

Determinare, se esistono, due matrici A e B di ordine 3 e di rango 2 tali che la matrice $A \cdot B$ abbia rango uguale a 1.

Determinare, se esistono, due matrici A e B di ordine 3 e di rango 2 tali che la matrice $A \cdot B$ abbia rango uguale a 0.

SECONDO ESERCIZIO [7 punti] Determinare tutte le soluzioni del seguente sistema di equazioni lineari a coefficienti nel campo \mathbb{Z}_{23} :

$$\begin{cases} +[24]_{23}x + [1]_{23}y + [1]_{23}z &= [1]_{23} \\ +[7]_{23}x + [5]_{23}y + [20]_{23}z &= [2]_{23} \\ -[8]_{23}x + [17]_{23}y + [2]_{23}z &= [20]_{23} \end{cases}$$

TERZO ESERCIZIO [8 punti] Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4[x]$.

Sia E il sottospazio vettoriale avente come base

$$\mathbf{v}_1 = 1 + x \text{ e } \mathbf{v}_2 = 1 + x + x^2 + x^3.$$

Sia F il sottospazio vettoriale avente come base

$$\mathbf{v}_3 = x^2 + x^3 \text{ e } \mathbf{v}_4 = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3.$$

1. Determinare una base di $E + F$
2. Determinare, se esiste, una base di $E \cap F$
3. Determinare una base di un sottospazio G , supplementare di E in $\mathbb{R}^4[x]$

QUARTO ESERCIZIO [8 punti] Sia data la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Determinare tutte le matrici di Jordan simili alla matrice A
2. Scelta una matrice di Jordan J simile ad A , determinare una matrice invertibile M tale che si abbia $J = M^{-1}AM$